



矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

矩阵分析

- 向量范数
- 矩阵范数
- 序列极限
- 矩阵幂级数
- 矩阵函数
- 矩阵微积分
- 矩阵函数的应用

序列极限

定义 设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$, $k=1, 2, \dots$ 是空间 C^n 的一个向量序列, 记为 $\{x^{(k)}\}$. 如果当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 它的 n 个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

则称向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 是**按分量收敛的**, 向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

称为它的**极限向量**, 记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha \quad \text{或} \quad x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha .$$

如果至少有一个分量数列是**发散的**, 则称该向量序列是**发散的**.

序列极限

例 向量序列 $x^{(k)} = \begin{pmatrix} 2^{-k} \\ \frac{1}{k+1} \\ 1 - \frac{\sin k}{k+1} \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots$

是一个收敛的向量序列, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

而向量序列 $x^{(k)} = \begin{pmatrix} 2^{-k} \\ \frac{1}{k+1} \\ \sin k \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots$

是发散的, 因为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin k$ 不存在.

序列极限

定义. 设 $\{x_n\} (n=1,2,3,\dots)$ 是线性赋范空间 $V(F, \|\bullet\|)$ 中的序列, $x \in V(F, \|\bullet\|)$ 若当 n 趋于无穷大时, 有:

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0$$

则称向量序列 $\{x_n\}$ 按范数 $\|\bullet\|$ 收敛于向量 x , 或称向量 x 是向量序列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷大时的极限, 记为:

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

序列极限

- 向量序列 $\{x_n\}$ 是否收敛于向量 x 和赋范空间有关.
- 有时序列 $\{x_n\}$ 在一种范数下收敛于 x ,而在另一种范数下不收敛于 x .
- 对于有限维向量空间,由于各种范数之间是等价的,所以,向量序列 $\{x_n\}$ 若按某一范数收敛与某一向量 x ,则按其它范数也收敛于 x .

序列极限

□ 定理1 (序列极限定理)

n 维线性空间 F^n 中的向量序列 $\{x_m\}$ ($x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$) 按某范数收敛于某向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n$ 的充分必要条件是各个分量序列 $\{x_i^{(m)}\} (i=1, 2, \dots, n)$ 收敛于 x 的相应分量 x_i . 即:

$$x_m \rightarrow x \Leftrightarrow x_i^{(m)} \rightarrow x_i \quad (m \rightarrow \infty)$$

序列极限

□ 定理1 (序列极限定理)

证明: 必要性, 设 $\{x_m\}$ 按 ∞ -范数收敛于 x , 即:

$$\|x_m - x\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

由定义有 $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(m)} - x_i| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$

而: $|x_i^{(m)} - x_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(m)} - x_i| \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$

所以 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$

充分性: 设 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(m)} - x_i| = 0$$

即: $\|x_m - x\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$

序列极限

□ 定理2 设 $\{x^{(k)}\}$ 是 C^n 中的向量序列，它按分量收敛当且仅当它按 C^n 中的任一向量范数收敛.

序列极限

例 考察 $x_n(t) = t^n (t \in [0,1])$ 按连续函数的1-范数和 ∞ -范数是否收敛于 $x(t) = 0$

$$\|x(t)\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt, \quad \|x(t)\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$$

$$\|x_n(t) - x(t)\|_1 = \int_0^1 |x_n(t)| dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\|x_n(t) - x(t)\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |t^n - 0| = 1 \neq 0$$

所以, 序列 $\{x_n(t)\} = \{t^n\} (t \in [0,1])$ 按1-范数收敛于0,
按 ∞ -范数收敛于1

序列极限

定义: (完备的赋范线性空间)

若某赋范线性空间中任一序列 $\{x_m\}$, 满足下列性质:

对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N , 使得当 $m, n > N$ 时, 恒有:

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

$\{x_m\}$ 必收敛到该空间中某个元素 x , 则称此空间为

完备的赋范线性空间或巴拿赫 (Banach) 空间

定理3: 任意有限维线性赋范空间都是 Banach 空间

矩阵极限

定义：设矩阵序列 $\{A_m\}$ 和矩阵 A ，其中

$$A_m = (a_{ij}^{(m)}) \in F^{n \times n}, A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$$

若对于某个范数 $\|\bullet\|$, 有

$$\|A_m - A\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

则称序列 $\{A_m\}$ 按范数 $\|\bullet\|$ 收敛于 A ，或者说 A 是 $\{A_m\}$ 的关于范数 $\|\bullet\|$ 当 $(m \rightarrow \infty)$ 时的极限, 记为:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A$$

矩阵极限

□ **定理4** 矩阵序列 $\{A_m\}$ 按某范数收敛于 A 的充分必要条件
是 $A = (a_{ij})$ 中各元素 $a_{ij}^{(m)}$ 构成的数列收敛于
中对应 a_{ij} 的元素

$\|A\|_\infty$: 行和最大

$$\text{充分性: 已知 } \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}^{(m)} = a_{ij} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m - A\|_\infty = 0$$

$$\text{必要性: 已知 } \|A_m - A\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}^{(m)} = a_{ij}$$

矩阵极限

□ 定理5: 矩阵序列按各种范数的收敛是等价的

□ 定理6: $A \in C^{n \times n}$, 则 $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m = O_{n \times n}$ 的充要条件是:

$$\rho(A) < 1$$

$$(\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|)$$

矩阵极限

- 1) 一个收敛的矩阵序列的极限是唯一的。 证明: $\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m - A\| = 0$
- 2) 设 $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A$ $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = B$ 则 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|B_m - B\| = 0$
- $\lim_{m \rightarrow \infty} (aA_m + bB_m) = aA + bB$ 求证: $\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m B_m - AB\| = 0$
- 3) 设 $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A$ $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = B$ 则 $\lim_{m \rightarrow \infty} (A_m B_m) = AB$ $\left[\sum_{k=1}^n a_{ik}^{(m)} a_{kj}^{(m)} \right]$
- 4) 设 $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A$, $A_m, A, P, Q \in C^{n \times n}$, 则:
- $\lim_{m \rightarrow \infty} PA_m Q = PAQ$
- 5) 设 $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A$, 且 A_m, A 都是可逆的, 则: $\{A_m^{-1}\}$ 也收敛, 且: $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m^{-1} = A^{-1}$

矩阵极限

例：如果设 $A_m = (a_{ij}^{(m)}) \in C^{2 \times 2}$ ，其中

$$a_{11}^{(m)} = \frac{m+1}{3m}, a_{12}^{(m)} = r^m (0 < r < 1),$$

$$a_{21}^{(m)} = r^{\frac{1}{m}} (r > 1) \quad a_{22}^{(m)} = \frac{m^2 - m}{m^2 + m}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵极限

例 构造一个收敛的二阶可逆矩阵序列，但其极限矩阵不可逆。

解

$$\begin{aligned}a_{11}^{(k)} &= \frac{k+1}{3k}, & a_{12}^{(k)} &= \sqrt[k]{k} \\ a_{21}^{(k)} &= \sqrt[k]{5}, & a_{22}^{(k)} &= \frac{3k^2 - k}{k^2 + 2}\end{aligned}$$

显然每一个 $A^{(k)} (k=1, 2, \dots)$ 均可逆，但是其极限矩阵

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

却不可逆。

矩阵级数

- 向量范数
- 矩阵范数
- 序列极限
- 矩阵级数
- 矩阵函数
- 矩阵微积分
- 矩阵函数的应用

矩阵级数

定义 : 设 $A \in C^{n \times n}$, A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 我们称

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$$

为矩阵 A 的谱半径。

若 λ 是 A 的任意特征值, $x \neq 0$ 是 λ 对应的 eigenv.

$B = (x, 0, 0, \dots)$ 是构造出来的 $n \times n$ 矩阵

$$\Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow A \cdot B = (\lambda x, 0, 0, \dots) = \lambda B$$

定理 : 设 $A \in C^{n \times n}$, 那么

$$|\lambda| \|B\| = \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

由于 B 非零矩阵 $\Rightarrow \|B\| > 0$

这里 $\|A\|$ 是矩阵 A 的任何一种范数。 $\Rightarrow \|\lambda\| \leq \|A\|$

λ 取最大绝对值的特征值

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

矩阵级数

定理： 设 A 是一个正规矩阵，则 $A^H A = A A^H$

$$\rho(A) = \|A\|_2$$

证明： 因为

$$\|A\|_2^2 = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_2^2}{\|X\|_2^2} = \max_{X \neq 0} \frac{X^H A^H A X}{X^H X}$$

$$\frac{x^H (A^H A) x}{x^H \cdot x}$$

$$= \rho(A^H A) = \rho(A)^2$$

$$A = U \Sigma V^H = \sigma_1 u_1 v_1^H + \sigma_2 u_2 v_2^H + \dots + \sigma_r u_r v_r^H$$

$n \times n$
 $\text{rank}(A)$

于是有：

$$\rho(A) = \|A\|_2$$

矩阵极限

□ 定理7 设 $A \in C^{n \times n}$ ，若存在 $C^{n \times n}$ 上的一种矩阵范数 $\| \cdot \|$ ，使得 $\| A \| < 1$ ，则 $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$

□ 定理8 设 $\| \cdot \|$ 是 $C^{n \times n}$ 上的一种矩阵范数，则对任意矩阵 $A \in C^{n \times n}$ ，有

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \| A^k \|^{1/k}$$

矩阵级数

例 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ 的充要条件是 $\rho(A) < 1$ 。

证明 设A的Jordan标准形

$$J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_r(\lambda_r))$$

$$\underline{J_i(\lambda_i)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

于是 $A^k = P \text{diag}(J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \dots, J_r^k(\lambda_r)) P^{-1}$

显然, $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ 的充要条件是 $\lim_{k \rightarrow \infty} J_i^k(\lambda_i) = 0, i = 1, 2, \dots, r$

矩阵级数

又因

$$J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & c_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & c_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

其中

$$c_k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \quad (\text{当 } l \leq k)$$

$$c_k^l = 0 \quad (\text{当 } l > k)$$

于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} J_i^k(\lambda_i) = 0$ 的充要条件是 $|\lambda_i| < 1$ 。

因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ 的充要条件是 $\rho(A) < 1$

矩阵级数

➤ 矩阵级数的定义

定义1. 由 $F^{n \times n}$ 中的矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 构成的无穷和

$$A^{(0)} + A^{(1)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

称为矩阵级数，记为 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 。

不收敛的矩阵级数称之为发散的

$\forall n \in N$

称: $S^{(n)} = \sum_{k=0}^n A^{(k)}$ 为矩阵级数的部分和。
则 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛

➤ 矩阵级数

且有和S，记为: $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$

若由矩阵级数部分和 $A^{(0)} + A^{(1)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$ 收敛，且有极限S:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^{(n)} = S$$

矩阵级数

例 已知矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 的通项为

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{4^k} \\ 0 & \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{pmatrix}$$

判断矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 的敛散性

[解答] 考察上述矩阵级数的部分和

$$S^{(n)} = \sum_{k=0}^n A^{(k)} \quad A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n}, S = (s_{ij})_{n \times n}$$

矩阵级数

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{4^k} \\ 0 & \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{pmatrix}$$

$$S^{(n)} = \sum_{k=0}^n A^{(k)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^n \frac{\pi}{4^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^n} & \frac{\pi}{3} \left(4 - \frac{1}{4^n}\right) \\ 0 & 1 - \frac{1}{n+2} \end{pmatrix}$$

Handwritten red notes: $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$ with an arrow pointing to the term $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ in the sum.

$$s^{(n)} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

矩阵级数收敛, 且其和为 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{(n)} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{4\pi}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵级数

➤ 矩阵级数的绝对收敛

定义. 设: $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 若对某一个矩阵范数满足:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\| = \|A^{(1)}\| + \|A^{(2)}\| + \cdots + \|A^{(k)}\| + \cdots$$

是收敛的, 则称矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ **绝对收敛**

说明 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 是正项级数.

由矩阵范数的等价性知, 矩阵的绝对收敛与矩阵范数的选择无关

矩阵级数

定理. 设 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n} \in C^{n \times n}$

矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛的充要条件是每个数值级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}|$ 都收敛, 即 $\sum_{k=0}^{\infty} \underline{a_{ij}}$ 绝对收敛.

证明: 先给出矩阵范数 $\|A\|_1 = \max_j \left| \sum_{i=1}^n a_{ij} \right|$

必要性:

若正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|_1$ 收敛, 由 $\|A^{(k)}\|_1 = \max_j \left| \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(k)} \right|$

可知 $|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A^{(k)}\|_1 \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n$

由正项级数的比较判别法, 可知 $n \times n$ 个数值级数

矩阵级数

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| \quad i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n; \text{ 收敛,}$

从而矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛。

由矩阵范数的等价性及正项级数的比较判别法,
可知上述命题对 $\forall \|\bullet\| \rightarrow R$ 均成立.

充分性:

若每个数值级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}|$ 都收敛, 其相加所构成的级

数 $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}^{(k)}|$ 都收敛, 由于

$$\|A^{(k)}\|_1 = \max_j \left| \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(k)} \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}^{(k)}|$$

由正项级数的比较判别法,

可知级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|_1$ 收敛。

矩阵级数

定理： 设 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = A$, $\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)} = B$, 其中:

$A^{(k)}, B^{(k)}, A, B \in C^{m \times n}, k = 0, 1, \dots$ 则

1,
$$\sum_{k=0}^{\infty} (A^{(k)} + B^{(k)}) = A + B$$

2,
$$\forall \lambda \in C \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda A^{(k)} = \lambda A$$

3, 若矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛 (或绝对收敛) , 则

矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} P A^{(k)} Q$ 也收敛 (或绝对收敛) ,

并且有:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P A^{(k)} Q = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \right) Q$$

矩阵级数

证明：因 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = A$ ，记 $S^{(n)} = \sum_{k=0}^n A^{(k)}$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S^{(n)} = A$

考察级数 $\sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 的部分和的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n PA^{(k)}Q = P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^{(k)})Q = PAQ$$

可见 $\sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 收敛，且 $\sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q = P(\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)})Q$

若 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛，由于

$$\|PA^{(k)}Q\| \leq \|P\| \|A^{(k)}\| \|Q\| = \|P\| \|Q\| \cdot \|A^{(k)}\|$$

由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 绝对收敛

矩阵级数

➤ 矩阵的幂级数

定义：设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ，称形如：

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_k A^{(k)} + \cdots$$

的矩阵级数为矩阵幂级数。

矩阵级数

定理： 设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 的收敛半径为 R 为 n 阶方阵
若 $\rho(A) < R$, 则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ **绝对收敛**;
若 $\rho(A) > R$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散。

证明： 设 A 的Jordan标准形为

$$J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_r(\lambda_r))$$

$$\text{其中 } J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

矩阵级数

于是 $A^k = P \text{diag}(J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \dots, J_r^k(\lambda_r)) P^{-1}$

$$J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & c_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & c_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

矩阵级数

$$\begin{aligned}\text{所以 } \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (P J^k P^{-1}) \\ &= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k J^k \right) P^{-1} \\ &= P \text{diag} \left(\sum_{K=0}^{\infty} c_k J_1^k(\lambda_1), \sum_{K=0}^{\infty} c_k J_2^k(\lambda_2), \right. \\ &\quad \left. \cdots, \sum_{K=0}^{\infty} c_k J_r^k(\lambda_r) \right) P^{-1}\end{aligned}$$

矩阵级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k & \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

$$c_k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} (\text{当 } l \leq k)$$

$$c_k^l = 0 \quad (\text{当 } l > k)$$

矩阵级数

当 $\rho(A) < R$ 时, 幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ , \quad \cdots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1}$$

都是绝对收敛的, 故矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛。

当 $\rho(A) > R$ 时, 幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k$ 发散,

所以 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散。

矩阵级数

例：证明对任意的 $A \in F^{n \times n}$

矩阵幂级数：
$$I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$
 绝对收敛.

[证明] 由于 $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ $C_k = \frac{1}{k!}$

并且：

$$\|I_n\| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|I_n\| + e^{\|A\|} - 1$$

所以, 原矩阵幂级数绝对收敛, 从而也是收敛的

矩阵级数

□ 常用矩阵级数

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{A^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}$$

矩阵级数

定理：设 $A \in F^{n \times n}$ 矩阵幂级数

$$I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

绝对收敛的充要条件是 $\|A\| < 1$ ，且其和为： $(I - A)^{-1}$

[证明] 绝对收敛性由 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 定理4立即可以得到, 下证 $C_k = 1$ $R = 1$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

令 $S_k = I + A + A^2 + \cdots + A^k$ 则：
 $\rho(A) \leq \|A\|$
 $\|A\| = \rho(A) + \varepsilon$ which is very small

矩阵级数

$$\begin{aligned} S_k(I-A) &= (I + A + A^2 + \cdots + A^k)(I-A) \\ &= I + A + A^2 + \cdots + A^k - (A + A^2 + \cdots + A^k + \lim_{k \rightarrow \infty} A^k) = O_{n \times n} \\ &= I - A^{k+1} \end{aligned}$$

由于 $\|A\| < 1$, 由定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^k = O$

所以, 对 $S_k(I-A) = I - A^{k+1}$ 两端取极限:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(I-A) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - A^{k+1}) = I - O$$

$$\text{即: } S(I-A) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - A^{k+1}) = I \quad (S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k)$$

$$S = (I - A)^{-1}$$

矩阵级数

例 (1) 求下面级数的收敛半径

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k \cdot k} = \frac{x}{2 \cdot 1} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^k}{2^k \cdot k} + \cdots$$

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

判断矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{2^k \cdot k}$ 的敛散性。

解 设此级数的收敛半径为R, 利用公式 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{R}$ 容易

求得此级数的收敛半径为2。而 $\rho(A) = 1$ 。所以由上面的定理可知矩阵幂级数收敛。

矩阵级数

5, 若 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}$ 均绝对收敛, 则它们按项相乘所得的矩阵级数

$$A^{(0)}B^{(0)} + (A^{(0)}B^{(1)} + A^{(1)}B^{(0)}) + \cdots + (A^{(0)}B^{(k)} + \cdots + A^{(k)}B^{(0)}) + \cdots$$

也绝对收敛, 且其和为 AB

证明: 首先由命题条件可知, 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty} \|B^{(k)}\|$ 均收敛。

记

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\| = \sigma_1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|B^{(k)}\| = \sigma_2$$

考察矩阵级数

$$A^{(0)}B^{(0)} + (A^{(0)}B^{(1)} + A^{(1)}B^{(0)}) + \cdots + (A^{(0)}B^{(k)} + \cdots + A^{(k)}B^{(0)}) + \cdots$$

的通项的范数

$$\|A^{(0)}B^{(k)} + \cdots + A^{(k)}B^{(0)}\| \leq \|A^{(0)}\| \|B^{(k)}\| + \cdots + \|A^{(k)}\| \|B^{(0)}\|$$

由正项级数的比较判别法可知，级数

$$A^{(0)}B^{(0)} + (A^{(0)}B^{(1)} + A^{(1)}B^{(0)}) + \cdots + (A^{(0)}B^{(k)} + \cdots + A^{(k)}B^{(0)}) + \cdots$$

绝对收敛，记：

$$S_1^{(n)} = \sum_{k=0}^n A^{(k)} \quad S_2^{(n)} = \sum_{k=0}^n B^{(k)}$$

$$S_3^{(n)} = \sum_{k=0}^n (A^{(0)}B^{(k)} + \cdots + A^{(k)}B^{(0)})$$

则

$$S_1^{(n)}S_2^{(n)} - S_3^{(n)} = A^{(1)}B^{(n)} + A^{(2)}B^{(n-1)} + \cdots + A^{(n)}B^{(1)} + \cdots + A^{(n)}B^{(n)}$$

再记

$$\sigma_1^n = \sum_{k=0}^n \|A^{(k)}\| \quad \sigma_2^n = \sum_{k=0}^n \|B^{(k)}\|$$

$$\sigma_3^{(n)} = \sum_{k=0}^n (\|A^{(0)}\| \|B^{(k)}\| + \|A^{(1)}\| \|B^{(k-1)}\| + \cdots + \|A^{(k)}\| \|B^{(0)}\|)$$

由矩阵范数的三角不等式及相容性

$$\|S_1^{(n)}S_2^{(n)} - S_3^{(n)}\| \leq \sigma_1^n \sigma_2^n - \sigma_3^n$$

再由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1^{(n)}S_2^{(n)} = AB \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_1^n \sigma_2^n - \sigma_3^n) = 0$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_3^{(n)} = AB$$



Thanks