



矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

矩阵分析

- 向量范数
- 矩阵范数
- 序列极限
- 矩阵幂级数
- 矩阵函数
- 矩阵微积分
- 矩阵函数的应用

向量范数

向量范数概念

设 $V(F)$ 是数域 F 上的线性空间，定义在 $V(F)$ 上的实值函数 $\|\bullet\|: V(F) \rightarrow R$ 如果满足以下条件：

✦ 正定性 $\|x\| \geq 0$ ，且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

✦ 齐次性 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

✦ 三角形不等式 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称此实值函数 $\|\bullet\|$ 是 $V(F)$ 上的范数。带有给定范数的线性空间 $(X, \|\bullet\|)$ 称为赋范空间。

向量范数

□ 向量范数若干基本性质

➤ 当 $\|x\| \neq 0$, $\left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = 1$

➤ $\forall x \in V, \|-x\| = \|x\|$

➤ $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

➤ $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$

$\sim \|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

$(\|x\| - \|y\|)$

$$\begin{cases} \|x\| \leq \|y\| + \|x - y\| \\ \|y\| \leq \|x\| + \|x - y\| \end{cases}$$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$y = y - x + x$

$x = x - y + y$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x - y + y\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y\| \end{aligned}$$

$x = x + y + (-y)$

向量范数

例1 设向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in C^n$, 规定

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

则 $\|x\|$ 是 C^n 上的一个范数. 此范数称为向量 x 的 **1-范数**, 记为 $\|x\|_1$, 即

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

向量范数

例2 设向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in C^n$, 规定

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

则 $\|x\|$ 是 C^n 上的一个范数. 此范数称为向量 x 的 ∞ -范数, 记为 $\|x\|_\infty$, 即

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$\|x\|$

$\|y\|$

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i|$$

向量范数

例3 设向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in C^n$, 规定

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

则 $\|x\|$ 是 C^n 上的一个范数. 此范数称为向量 x 的 2-范数, 记为 $\|x\|_2$, 即

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^H x}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum |x_i|^2} + \sqrt{\sum |y_i|^2}$$

向量范数

例4 设向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in C^n$, 规定

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

则 $\|x\|$ 是 C^n 上的一个范数. 此范数称为向量 x 的 p -范数, 记为 $\|x\|_p$, 即

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

向量范数

□ 证明p-范数

➤ 思路：验证(1)正定性,(2)齐次性,(3)三角不等式

➤ (1)正定性成立

➤ (2)对任意的实数 $a \in C(R)$,由实值函数的定义:

$$\|ax\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |ax_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|a|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \|x\|_p$$

➤ (3)三角不等式证明

引理 (Minkowski不等式) :

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

向量范数

由Minkowski不等式可得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p\end{aligned}$$

向量范数

定理1: $\|\alpha\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$

证明: 令 $x = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$ $y_i = |a_i|/x$, $i = 1, 2, \dots, n$

于是有 $\|\alpha\|_p = x \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}$

另 $1 \leq \sum_{i=1}^n y_i^p \leq n$

故

$$1 \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p} \leq n^{1/p}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p} = 1$$

$$\|\alpha\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\alpha\|_p = x = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$$

向量范数

例5 设 A 是任意 n 阶 实对称正定 矩阵, n 维列向量 x ,
则函数

$$\|x\|_A = (x^T A x)^{1/2}$$

是 R^n 上的一种向量范数, 称为加权范数或椭圆范数.

$$\|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A$$

<1> A 实对称 $\rightarrow$ SVD 分解: $A = \sigma_1 u_1 v_1^H + \sigma_2 u_2 v_2^H + \dots + \sigma_r u_r v_r^H$

<2> 证明三角不等式

向量范数

□ 函数的范数

➤ 设 $C[a,b]$ 是由 $[a,b]$ 上所有连续函数 $f(x)$ 所构成的集合, 如下三种映射都是 $C[a,b]$ 的范数.

$$\|f(x)\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \forall f(t) \in C[a,b]$$

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f(t) \in C[a,b]$$

$$\|f(x)\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|, \forall f(t) \in C[a,b]$$

向量范数

1. 设 $\|x\|_{V_1}, \|x\|_{V_2}$ 是线性空间 $V(F)$ 上的两个向量范

数, 则对于任意的 $x \in V$, 有:

(1), $\|x\| = \max\{\|x\|_{V_1}, \|x\|_{V_2}\}$ 是 $V(F)$ 上的范数.

(2), $\|x\| = k_1\|x\|_{V_1} + k_2\|x\|_{V_2}$ 是 $V(F)$ 上的范数.

3. 设 $\|x\|$ 是 $C^n(R^n)$ 中的向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的

向量范数, 则 $\|x\|$ 必为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的连续函数

向量范数

证明: 因为 $\|x\|$ 是关于 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的实值函数, 令:

$$\|x\| = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{且记:}$$

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)^T$$

则对任意的 $x, y \in C^n$ 可以表示成:

$$x = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$$

$$y = y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_n \varepsilon_n \quad \text{于是有:}$$

$$\begin{aligned} |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)| &= \left| \|y\| - \|x\| \right| \leq \|y - x\| \\ &= \|(y_1 - x_1)\varepsilon_1 + (y_2 - x_2)\varepsilon_2 + \dots + (y_n - x_n)\varepsilon_n\| \\ &\leq |y_1 - x_1| \|\varepsilon_1\| + |y_2 - x_2| \|\varepsilon_2\| + \dots + |y_n - x_n| \|\varepsilon_n\| \end{aligned}$$

又由于 $\|\varepsilon_i\|$ 是固定向量 ε_i 的范数, 所以, 它与 x_i, y_i

是无关的, 所以, 当 $y_i \rightarrow x_i$ 时, 有:

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

所以 $\|x\|$ 必为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的连续函数

向量范数

□ **定义** $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是 n 维线性空间中任意两种向量范数, 若存在两个与向量无关的正常数 c_1, c_2 , 使得对所有 $x \in V$, 有不等式

$$c_1 \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2 \|x\|_\beta$$

则称向量范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 是等价的.

□ **定理** 有限维线性空间 V 上的任意两个向量范数都是等价的

向量范数

证明: 设 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是 n 维线性空间 $C^n(R^n)$ 上的两个范数, 当 $x=0$ 时, 结论显然成立, 当 $x \neq 0$ 时, 由于范数是连续函数, 所以存在有界闭集

$$S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

使得: $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 都在 S 上连续, 且 $x \neq 0$ 时,

$$\|x\|_\alpha \neq 0 \quad \|x\|_\beta \neq 0 \quad \text{令} \quad \varphi(x) = \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$$

则 $\varphi(x)$ 也是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的连续函数, 所以, 在 S 上, 可以取最大值和最小值

向量范数

即存在 $x_0, y_0 \in S$, 使得

$$m = \min\left\{\frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}\right\} = \frac{\|x_0\|_\alpha}{\|x_0\|_\beta} = \varphi(x_0) > 0$$

$x = x_0$

$$M = \max\left\{\frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}\right\} = \frac{\|y_0\|_\alpha}{\|y_0\|_\beta} = \varphi(y_0) > 0$$

$x = y_0$

对任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 且 $x \neq \theta$, 取:

$$y = \frac{x}{\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}} \quad \text{则 } y \in S$$

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\quad}}, y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{\quad}}, \dots$$

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1$$

$\Rightarrow y \in S$

向量范数

从而有 $m \leq \frac{\|y\|_\alpha}{\|y\|_\beta} \leq M$, 而 $m \leq \varphi(y) \leq M$ $\varphi(y) = \frac{\|y\|_\alpha}{\|y\|_\beta}$

$$\frac{\|y\|_\alpha}{\|y\|_\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}} \|x\|_\alpha}{\frac{1}{\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}} \|x\|_\beta} = \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$$

所以, $\underbrace{m}_{\text{red}} \leq \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta} \leq \underbrace{M}_{\text{red}}$, 即: $\|x\|_\beta m \leq \|x\|_\alpha \leq M \|x\|_\beta$

所以, $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$ 是等价的

向量范数

□ 定理 $C^n(R^n)$ 中的 $\|\bullet\|_1, \|\bullet\|_2$ 和 $\|\bullet\|_\infty$ 两两等价.

向量范数

□ 定理 $C^n(R^n)$ 中的 $\|\bullet\|_1, \|\bullet\|_2$ 和 $\|\bullet\|_\infty$ 两两等价.

证明:(1) 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 则有

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \underline{n \cdot \max |x_i|} = n \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_1 \geq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|x\|_\infty \text{ 所以 } \|\bullet\|_1, \|\bullet\|_\infty \text{ 等价}$$

$$(2) \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \underline{n \cdot \max |x_i|^2} = \underline{n \|x\|_\infty^2}$$

$$\|x\|_2^2 \geq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2 = \|x\|_\infty^2$$

$$\text{所以 } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \underline{\sqrt{n}} \|x\|_\infty, \text{ 即 } \|\bullet\|_2, \|\bullet\|_\infty \text{ 等价}$$

矩阵分析

- 向量范数
- 矩阵范数
- 序列极限
- 矩阵幂级数
- 矩阵函数
- 矩阵微积分
- 矩阵函数的应用

矩阵范数

□ **定义** 设 $A \in C^{m \times n}$, 按照某个对应法则, 对应于一个实数 $\|A\|$, 且满足下列四个条件:

➤ (1) **正定性** $\|A\| \geq 0$, 且 $\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = 0$;

➤ (2) **齐次性** $\|kA\| = |k| \|A\|$

➤ (3) **三角不等式** $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

➤ (4) **相容性** $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, 其中 A, B 可乘。

则称 $\|A\|$ 为 $C^{m \times n}$ 上矩阵 A 的范数。

矩阵范数

例1: 对于任意 $A \in C^{m \times n}$, 定义

$$\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

称为 $\|A\|_{m_1}$ 范数

证明如此定义的 $\|A\|$ 的确为矩阵 A 的范数。

矩阵范数

例1: 对于任意 $A \in C^{m \times n}$, 定义

$$\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

称为 $\|A\|_{m_1}$ 范数

证明如此定义的 $\|A\|$ 的确为矩阵 A 的范数。

证明 验证乘法的相容性。设 $A \in C^{m \times p}, B \in C^{p \times n}$ 则

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p |a_{ik}| |b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^p |a_{ik}| \sum_{k=1}^p |b_{kj}| \right) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p |a_{ik}| \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p |b_{kj}| \right) = \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

更多

矩阵范数

例2：设矩阵 $A \in C^{n \times n}$ ，问：

称为 $\|A\|_{m_\infty}$ 范数

$$\|A\| = n \max_{i,j} |a_{ij}| \quad \text{是否为矩阵范数?}$$

A, B

$$\|A+B\| = n \max_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}|$$

$$\leq n \max_{i,j} (|a_{ij}| + |b_{ij}|)$$

$$\|AB\| = n \max_{i,j} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|$$

矩阵范数

例2：设矩阵 $A \in C^{n \times n}$ ，问：

称为 $\|A\|_{m_\infty}$ 范数

$$\|A\| = n \max_{i,j} |a_{ij}| \quad \text{是否为矩阵范数?}$$

证明：考虑乘法的相容性。设 $A \in C^{n \times n}, B \in C^{n \times n}$

那么

$$\begin{aligned} \|AB\| &= n \max_{i,j} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq n \max_{i,j} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &\leq \cancel{n \cdot n} \max_{i,k} |a_{ik}| \max_{k,j} |b_{kj}| \\ &= \cancel{n} \max_{i,k} |a_{ik}| \cdot \cancel{n} \max_{k,j} |b_{kj}| \\ &= \|A\| \|B\| \quad \text{因此 } \|A\| \text{ 为矩阵 } A \text{ 的范数。} \end{aligned}$$

矩阵范数

例3: 对于任意 $A \in C^{m \times n}$, 定义 $\|A\|_F$ 称为 $\|A\|_{m_2}$ 范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

证明 $\|A\|_F$ 也是矩阵 A 的范数。

我们称此范数为矩阵 A 的 Frobenious 范数。

矩阵范数

例3: 对于任意 $A \in C^{m \times n}$, 定义 $\|A\|_{m_2}$ 范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{证明 } \|A\| \text{ 也是矩阵 } A \text{ 的范数。}$$

我们称此范数为矩阵 A 的 **Frobenious** 范数。

证明: 利用 Minkowski 不等式容易证明三角不等式,
验证乘法的相容性。

设 $A \in C^{m \times l}$, $B \in C^{l \times n}$, 则

$$\begin{aligned} \|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^l |a_{ik}| |b_{kj}| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^l |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^l |b_{kj}|^2 \right) \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l |b_{kj}|^2 \right) \quad \text{Cauchy-Schwarz inequality} \\ &= \|A\|_F^2 \|B\|_F^2 \end{aligned}$$

于是有: $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$

矩阵范数

例4：对于任意 $A \in C^{n \times n}$ ，定义 $\|A\| = [Tr(A^H A)]^{1/2}$

证明如此定义的 $\|A\|$ 是矩阵 A 的范数。

$$\text{注： } [Tr(A^H A)]^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Frobenious 范数的性质：

$$A \quad A^H A$$

1) 如果 $A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]$ ，那么 $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|\alpha_i\|_2^2$

2) $\|A\|_F^2 = TR(A^H A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^H A)$ $= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$
 $A^H A \rightarrow$ n 个特征值, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$

3) 设 $A \in C^{n \times n}$ ，则对任意 n 阶酉矩阵 U 和 V ，恒有

$$\|UA\|_F = \|AV\|_F = \|UAV\|_F = \|A\|_F \quad \|UA\|_F = TR(A^H U^H \cdot UA) = TR(A^H A)$$

称之为 F - 范数的酉不变性

矩阵范数

□ 设 $m \times n$ 阶矩阵 A 的秩为 r ， A 的奇异值展开式为

$$\text{令 } A = U\Sigma V^H = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T.$$

$$M = \{S \mid S \in \mathbf{C}^{m \times n}, \text{rank}(S) \leq k\}, k \leq r,$$

$$A_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T, (k \leq r)$$

求证：

$$\|A - A_k\|_F = \min_{S \in M} \|A - S\|_F.$$

矩阵范数

证明 首先可注意到

$$\|A - A_k\|_F = (\sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+2}^2 + \cdots + \sigma_r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $x \in M$, 且 $\|A - x\|_F = \min_{S \in M} \|A - S\|_F$, 由 x 的定义

$$\|A - x\|_F \leq \|A - A_k\|_F = (\sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_r^2)^{\frac{1}{2}}$$

又设 x 的奇异值分解为

$$x = Q^T \begin{pmatrix} \Omega_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P = Q^T \Omega P,$$

将 A 表示为

$$A = QQ^T APP^T = QB P^T,$$

其中

$$B = Q^T AP,$$

则

$$\|A - x\|_F = \|Q^T (B - \Omega) P\|_F = \|B - \Omega\|_F.$$

将 B 分块方式相应分块为

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

矩阵范数

$$\begin{aligned}\|A - x\|_F^2 &= \|B - \Omega\|_F^2 \\ &= \|B_{11} - \Omega_k\|_F^2 + \|B_{12}\|_F^2 + \|B_{21}\|_F^2 + \|B_{22}\|_F^2,\end{aligned}$$

由 x 的定义, 必有 $B_{12}=0, B_{22}=0, B_{11}=\Omega_k$. 否则可取

$$z = \begin{pmatrix} \Omega_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in M.$$

$\|A - z\|_F^2 = \|B_{22}\|_F^2 \leq \|A - x\|_F^2$, 与 x 的定义矛盾. 因此
 $\|A - x\|_F^2 = \|B_{22}\|_F^2$.

设 B_{22} 的奇异值分解为 $B_{22} = U_1^T \Lambda V_1$, 令

$$U_2 = \begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_1 \end{pmatrix},$$

则

$$U_2^T B V_2 = U_2^T Q^T A P V_2 = \begin{pmatrix} \Omega_k & \\ & \Lambda \end{pmatrix},$$

从而

$$A = (Q U_2) \begin{pmatrix} \Omega_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{pmatrix} (P V_2)^T.$$

矩阵 Λ 的主对角线上元素是矩阵 A 的奇异值, 所以

$$\|A - x\|_F^2 = \|B_{22}\|_F^2 = \|\Lambda\|_F^2 \geq (\sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_r^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

由式①和式②, 可得

$$\|A - x\|_F = (\sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_r^2)^{\frac{1}{2}} = \|A - A_k\|_F,$$

即

$$\|A - A_k\|_F = \min_{S \in m} \|A - S\|_F.$$

□

诱导范数（算子范数）

不同函数

定义：设 $\|X\|_{\alpha}$ 是向量范数， $\|A\|_{\beta}$ 是矩阵范数，如果对于任何矩阵 A 与向量 X 都有

$$\|AX\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\beta} \|X\|_{\alpha}$$

则称矩阵范数 $\|A\|_{\beta}$ 与向量范数 $\|X\|_{\alpha}$ 是相容的。

例：矩阵的Frobenius范数与向量的2-范数是相容的。

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = (X^H X)^{1/2}$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = (X^H X)^{1/2}$$

证明: 根据Hoider不等式可以得到

$$\|AX\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \right)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) \right]$$

$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)^2$
 $(a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

$$= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)$$

$$= \|A\|_F^2 \|X\|_2^2$$

$$\therefore \|AX\|_2 \leq \|A\|_F \|X\|_2$$

矩阵范数

定理 $\|x\|_\alpha$ 是 C^n 上的向量范数, $A \in C^{n \times n}$

则一定存在与向量范数相容的矩阵范数 $\|A\|_M$,

可定义为

$$\|A\|_M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$$

则称方阵范数 $\|A\|_M$ 是从属于向量范数 $\|x\|_\alpha$ 的**导出范数**,

或称 $\|A\|_M$ 是由向量范数 $\|x\|_\alpha$ **诱导出的矩阵范数**. 也

称 $\|A\|_M$ 是与 $\|x\|_\alpha$ 相应的**算子范数**.

定理： 设 $\|X\|_\alpha$ 是向量的范数，则

$$\|A\|_i = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

满足矩阵范数的定义，且 $\|A\|_i$ 是与向量范 $\|X\|_\alpha$ 相容的矩阵范数。

证明： 非负性，齐次性与三角不等式易证。 ^{$\|A\|_i$} 现在考虑矩阵范数的相容性。

$$\|A+B\|_i = \max_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax + Bx\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$$

$$\leq \max_x \frac{\|Ax\|_\alpha + \|Bx\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} \leq \max_x \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} + \max_x \frac{\|Bx\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$$

$$= \|A\|_i + \|B\|_i$$

$$B \neq 0$$

定理： 设 $\|X\|_\alpha$ 是向量的范数，则

$$\|A\|_i = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

满足矩阵范数的定义，且 $\|A\|_i$ 是与向量范 $\|X\|_\alpha$ 相容的矩阵范数。

证明： 非负性，齐次性与三角不等式易证。现在考虑矩阵范数的相容性。

$$\|AB\|_i = \max_{X \neq 0} \frac{\|ABX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} = \max_{X \neq 0} \left(\frac{\|A(BX)\|_\alpha}{\|BX\|_\alpha} \frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} \right) \quad B \neq 0$$

$$\leq \max_{BX \neq 0} \frac{\|A(BX)\|_\alpha}{\|BX\|_\alpha} \max_{X \neq 0} \frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

max $\frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$

$$\leq \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha} \max_{X \neq 0} \frac{\|BX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

$$= \|A\|_i \|B\|_i$$

最后证明 $\|A\|_i$ 与 $\|X\|_\alpha$ 是相容的。

$$\|A\|_i = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

由上面的结论可知

$$\|A\|_i \geq \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

$$\|AX\|_\alpha \leq \|A\|_i \|X\|_\alpha$$

这说明 $\|A\|_i$ 与 $\|X\|_\alpha$ 是相容的。

定义：上面所定义的矩阵范数称为由向量范数 $\|X\|_\alpha$ 所诱导的诱导范数或算子范数。

矩阵范数

定理 设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in C^{m \times n}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in C^n$,

则从属于向量的三种范数 $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ 的矩阵范数依

次为:

(1) $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

列和

$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10x_1 + x_2 \\ 10x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$
 $\|Ax\|_1 = 10x_1 + x_2 + 10x_1 + 2x_2$

(2) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$

谱范数

$\|x\|_1 = x_1 + x_2$

其中 λ_1 是 $A^H A$ 的最大特征值。

$\max_x \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \frac{20x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$
 $= 20 + \frac{17x_2}{x_1 + x_2}$
 $= 20$

(3) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

行和

矩阵范数

例 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3-4i \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

求 $\|A\|_{m_1}$, $\|A\|_{m_2}$, $\|A\|_{m_\infty}$, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$

矩阵范数

设 $C^{n \times n}$ ，可以根据范数的大小来判断是否为非奇异矩阵。

定理： 设 $C^{n \times n}$ ，且对设上的某种矩阵范数，有

$\|A\| < 1$ ，则 $I - A$ 非奇异，且

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{1 - \|A\|}$$

矩阵范数

定理 设 $A \in C^{n \times n}$, 且设对 $C^{n \times n}$ 上的某种矩阵范数满足 $\|A\| < 1$, 则

$$\|I - (I - A)^{-1}\| \leq \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}$$

矩阵范数

定义 设 A 是 n 阶矩阵，它的特征值的全体称为 A 的谱，记为

$$\lambda(A), \text{ 并且称 } \max_{\lambda \in \lambda(A)} |\lambda|$$

为矩阵 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$.

定理 $A \in C^{n \times n}$, 总有 $\rho(A) \leq \|A\|$.

矩阵范数

定理 $A \in C^{n \times n}$ 是正规矩阵, 则 $\rho(A) = \|A\|_2$.

定理 $A \in C^{n \times n}$ 是 n 阶非奇异矩阵, 则 A 的谱范数为

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sqrt{\rho(AA^H)}.$$



Thanks

向量 p -范数 $\|X\|_p$ 所诱导的矩阵范数称为矩阵 p -范数。即

$$\|A\|_p = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_p}{\|X\|_p}$$

常用的矩阵 p -范数为 $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ 和 $\|A\|_\infty$ 。

设 $A \in C^{m \times n}$, 那么

$$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{列和范数}$$

$$\|A\|_2 = \max_j (\lambda_j(A^H A))^{1/2}, \quad \lambda_j(A^H A) \quad \text{谱范数}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{行和范数}$$