矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

广义逆矩阵

- 广义逆矩阵：
  - 左逆与右逆
  - 减号广义逆
  - 加号广义逆
- 投影变换
- 最小二乘解

广义逆矩阵

- 不规则的矩阵是否有逆矩阵?

- 矩阵广义逆矩阵(简称广义逆)是可逆方阵的逆矩阵概念推广。
  - 广义逆矩阵适用于可逆方阵、奇异方阵、行列数不相等的长方阵.

广义逆矩阵

- **定义**:设$A\in C^{m\times n}$,若存在$B\in C^{n\times m}$使得

$$AB=I_m,$$

则称B为A的一个右逆,记为$B=A_R^{-1}$;同时称A为B的一个左逆,记为$A=B_L^{-1}$.

例: 对任意可逆方阵A,其逆矩阵A^{-1}显然既是左逆,又是右逆. 另,下列二矩阵互为左右逆: $AB=I_2$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\in C_2^{2\times 3}\qquad B=(\tfrac{1}{4})\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in C_2^{3\times 2}$$

广义逆矩阵

性质1:（存在性）

- A_L^{-1} 存在⇔矩阵A列满秩
- $A_L^{-1}=(A^HA)^{-1}A^H$

由于 $\overset{m\times n}{A}{}_L^{-1}$ 存在，$\forall \overset{n\times m}{B}$，$BA=I_n$，$\Rightarrow$ $\forall x\in C^n$，$BAx=0 \Rightarrow x=0$

$N(A)=\{0\}$ $\quad \dim(N(A))=0 \Rightarrow m\geq n \quad \dim(A)=\min(m,n)-\dim(N(A))$

$=n$

$\underline{A^HA} \qquad A$

$\underbrace{(A^HA)^{-1}A^H}_{\Delta}A=I_n$

广义逆矩阵

性质2: 设 $A \in C^{m\times n}$，下列条件等价

1. A左可逆
2. A的零空间N（A）$=\{0\}$。
3. $m\geq n$，秩（A）$=n$，即矩阵A是列满秩的。
4. 矩阵 $A^H A$ 可逆

广义逆矩阵

- **性质3**: $A \in C^{m\times n}$，则下列条件等价:

1. 矩阵A右可逆。
2. A的列空间R（A）$=C^m$
3. $n \geq m$，秩（A）$=m$，A是行满秩的。
4. 矩阵AA^H可逆

广义逆矩阵

例：　求矩阵A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 的左逆。

左逆与右逆用途

线性方程组求解

- 方程组AX=b 有解与左、右逆存在的关系。
- 借助于左、右逆求AX=b的形如X=Bb的解。

定理 设矩阵A $\in C^{m\times n}$左可逆，B是矩阵A的任何一个左逆，则

$(I_m - AB)b = 0 \Rightarrow ABb = b$ $\quad x = B\cdot b$

$\Rightarrow Ax = b$

- AX=b有形如X=Bb的解的充要条件是

$$(I_m - AB)b=0 \qquad (¤)$$

- 当(¤)式成立时，方程组的解是惟一的，而且惟一解是$X=(A^HA)^{-1}A^Hb$ $\quad A^HAx = A^H(Ax) = A^Hb$

$A^HAx = A^Hb$ $\quad \Rightarrow \quad x = (A^HA)^{-1}A^Hb$

左逆与右逆用途

- **定理** 设矩阵$A\in C^{m\times n}$右可逆，B是矩阵A的任何一个右逆，则$\forall b\in C^m$，$AX=b$有解$X=A_R^{-1}b$. 特别地，$X=A^H(AA^H)^{-1}b$是$AX=b$的一个解。

讨论：对任何满足式(¤)的左逆B，X=Bb都是方程组的解，如何解释方程组的解是惟一的？

广义减号逆

- **定义：** 设$A \in C^{m\times n}$,若存在$X \in C^{n\times m}$使得

$$AXA = A,$$

则称X为A的减号逆，记为A^{-}。

- **引理：** 若A^{-}为A的一个减号逆，则$(A^{-})^{T}$为A^{T}的一个减号逆.

广义减号逆

- 例：设若 $B=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$，则 $B^{-}=\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}_{n\times m}$，其中*可以任意选取.

广义减号逆

- 引理：若$B_{m\times n}=P_{m\times m}A_{m\times n}Q_{n\times n}$为，其中$P$，$Q$都是满秩矩阵，若$B$的减号逆为$B^-$，则$A$的减号逆为 $A^- = QB^- P$.

广义减号逆

- **定理：** 设复矩阵$A\in C^{m\times n}$，且$P\in C_m^{m\times m}$和$Q\in C_n^{n\times n}$，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

则

$$A^- = Q\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}P,\quad (*\text{可以任意选取}).$$

广义减号逆

例：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$ 则求A的减号逆?

解：先对A进行行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

广义减号逆

再对$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 进行列变换变为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

则可以得到

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -1/2 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

广义减号逆

则 A^{-}=QBP

$$A^{-}=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\-1/4&-1/2&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\-1/4&-1/2&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

广义减号逆

- 引理：设$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{m \times n}$，则$A$的减号广义逆唯一的充分必要条件是$m = n$，且$\boldsymbol{A}^{-1}$存在。

广义减号逆

■ **定理：** 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}, \lambda \in \mathbf{C}$，则 A^- 满足以下性质：

(1) $\operatorname{rank}(A) \leqslant \operatorname{rank}(A^-)$；

(2) AA^- 与 A^-A 都是幂等矩阵，且 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^-) = \operatorname{rank}(A^-A)$；

(3) $R(AA^-) = R(A)$，$N(A^-A) = N(A)$.

<1> $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^-A) \leq \operatorname{rank}(A^-)$

<2> $(AA^-)(AA^-) = AA^-AA^- = AA^-$

<3> AA^- vs A $\quad R(AA^-) \subseteq R(A)$ $\quad R(A) \subseteq R(AA^-)$

$[a_1\ a_2 \cdots a_n] \cdot [\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ ] = [b_1\ b_2 \cdots b_m]$

$x \in C^n \quad y = Ax \in R(A) \qquad y = AA^-(Ax) = AA^- \ \ (Ax \in C^n)$

$\Rightarrow R(AA^-) = R(A)$

$Ax = 0 \Rightarrow A^-Ax = 0 \qquad A^-$

$$Ax = 0 \Rightarrow A^{-}Ax = 0$$

$$A^{-1}Ax = 0 \Longrightarrow AA^{-}Ax = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

$$N(A^{-}A) = N(A)$$

广义减号逆

定理： 设 $A\in C^{m\times n}$，$A^-\in A\{1\}$，则当方程组 $Ax=b$ 有解时，其通解可表示为

$$x=A^-b+(I_n-A^-A)z,$$

这里 z 是任意的 n 维列向量.

$AA^-A=A \Rightarrow A(I_n-A^-A)=0 \Rightarrow A(I_n-A^-A)z=0 \qquad Ax=0$

$\mathrm{Rank}(I_n-A^-A)=?\qquad I_n-A^-A=I_n-Q\begin{bmatrix} I_r & * \\ * & * \end{bmatrix}PA$

$Q^{-1}(I_n-A^-A)Q=I_n-Q^{-1}Q\begin{bmatrix} I_r & * \\ * & * \end{bmatrix}PAQ=I_n-\begin{bmatrix} I_r & * \\ * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$=I_n-\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ *_{n-r} & 0 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -* & I_{n-r} \end{array}\right]$

$\mathrm{rank}(Q^{-1}(I_n-A^-A)Q)=n-r \Rightarrow \mathrm{rank}(I_n-A^-A)=n-r$

特解： $AA^-\underbrace{Ax}_{b}=Ax=b$

$A(A^-b)=b \qquad A^-b\longrightarrow x \qquad x=A^-b$

广义加号逆

- 定义：设 $A \in C^{m\times n}$，若存在矩阵 $G \in C^{m\times n}$ 满足
  - $AGA = A$
  - $GAG = G$
  - $(AG)^H = AG$
  - $(GA)^H = GA$

  则称 G 为 A 的Penrose-Moore逆，或加号逆，记作 A^+.

广义加号逆

- **定理：** 如果A有M-P广义逆，则A的M-P广义逆是惟一的。

M-P 广义加号逆 G_1 , G_2

反证法.

$G_1 = G_1AG_1 = (G_1A)^HG_1 = A^HG_1^HG_1$

$= (AG_2A)^HG_1^HG_1 = \underline{A^HG_2^H}A^HG_1^HG_1 = (G_2A)^H(G_1A)^HG_1$

$= G_2\underline{AG_1A}G_1 = G_2AG_1$

$G_2 = G_2AG_2 = \underline{G_2}(AG_2)^H = G_2G_2^HA^H$

$= G_2G_2^H\cdot(AG_1A)^H = G_2\underline{G_2^H\cdot A^H}\underline{G_1^HA^H} = G_2(AG_2)^H(AG_1)^H$

$= G_2\cdot\underline{AG_2}AG_1 = G_2\cdot A\cdot G_1$

A^+ 的性质

A^+ 的性质

- (1) 如果A可逆，则$A^+ = A^{-1}$;
- (2) $(A^+)^+ = A$, $(A^+)^H = (A^H)^+$;
- (3) $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$，其中

$$\lambda^+ = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

- (4) $r(A^+) = r(A^+A) = r(AA^+) = r(A)$;

$A^+ (A^+)^+ A^+ = A^+$

$(A^+)^+ A^+ (A^+)^+ = (A^+)^+$

$(A^+(A^+)^+)^H = A^+(A^+)^+$

A^+与A^{-1}性质的差异比较：

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，一般不成立$(AB)^+=B^+A^+$（只有满秩分解成立）

$(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}$，但不成立$(A^+)^k=(A^k)^+$

A^+ 的性质

例 5 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$，证明

(1) $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^+)$;

(2) $\operatorname{rank}(A^+A)=\operatorname{rank}(AA^+)=\operatorname{rank}(A)$.

证明 (1) 由 $A=AA^+A$ 知，$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(AA^+A)\leqslant\operatorname{rank}(A^+)$；由 $A^+=A^+AA^+$ 知，$\operatorname{rank}(A^+)=\operatorname{rank}(A^+AA^+)\leqslant\operatorname{rank}(A)$，故

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^+).$$

(2) 一方面，$\operatorname{rank}(A^+A)\leqslant\operatorname{rank}(A)$；另一方面

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(AA^+A)\leqslant\operatorname{rank}(A^+A),$$

故

$$\operatorname{rank}(A^+A)=\operatorname{rank}(A).$$

同理

$$\operatorname{rank}(AA^+)=\operatorname{rank}(A).$$

A^+ 的性质

A^+ 的性质

- (5) $(A^H A)^+ = A^+(A^H)^+, (AA^H)^+ = (A^H)^+ A^+;$
- (6) $A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (AA^H)^+;$
- (7) 若 $A^H = A$, 则 $AA^+ = A^+ A;$
- (8) $A = AA^T (A^+)^T = (A^+)^T A^T A\,;$
- (9) $N(AA^+) = N(A^+) = N(A^T), N(A^+ A) = N(A);$
- (10) $R(AA^+) = R(A), R(A^+ A) = R(A^+) = R(A^T);$

A^{+}的计算

- **M-P广义逆的求法**
  - 满秩分解
  - 奇异值分解

- **定理** 设rank(A) = r, A的满秩分解为A=BC，则

$$A^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}。$$

如果A是非奇异矩阵，则 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$ 并且由上面的公式计算出 $A^{+}=C^{-1}B^{-1}$，从而

$$A^{+}=A^{-1}$$

A^+的计算

如果A是非奇异矩阵，则 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$ 并且由上面的公式计算出 $A^+=C^{-1}B^{-1}$，从而

$$A^+=A^{-1}$$

如果矩阵A是行满秩的，A有满秩分解A = I_m A，则A^+的表达式为 $A^+=A^H(AA^H)^{-1}$

如果矩阵A是列满秩的，A有满秩分解A = A I_n，则A^+的表达式为 $A^+=(A^HA)^{-1}A^H$

A^{+}的计算

例：求广义逆 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

解　　由于A是行满秩的，故

$$A^{+}=A^{H}(AA^{H})^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

A^+ 的计算

例： 设 $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 求 A^+

由A为列向量，即为列满秩，则 $A^+=(A^HA)^{-1}A^H$

从而 $A^+=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

例： 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & 1\\1 & 2 & -1 & 2\\-1 & -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, 求 A^+

若A既不是行满秩也不是列满秩，则需首先对A进行满秩分解，再求 A^+

A^+的计算

首先利用初等行变换求出A的Hermite标准型H为：

$$H=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

设A的满秩分解为 $A=BC$，则 $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$

于是

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6&3\\3&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&-2\\1&-5&-6\\1&6&5\end{pmatrix}$$

A^+ 的计算

- **定理** 设rank(A) = r, A的奇异值分解为 $A = U\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$

  则：

$$A^+ = V\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H$$

A^+ 的计算

例：设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ 求 A^+

先求A的奇异值分解。因为 $A^HA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 A^HA 的特征值

为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=0.$ 对应的特征向量为：

$$x_1=(1,0,0)^T,x_2=(0,1,0)^T,x_3=(0,0,1)^T.$$

令 $V=(x_1,x_2,x_3)=(V_1,V_2),$ 其中 $V_1=(x_1,x_2),V_2=x_3,$

设 $U_1=AV_1\Delta^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$

A^{+} 的计算

把 $y_1=(0,0,1,0)^T, y_2=(0,0,0,1)^T$ 扩充为 R^4 的一组标准正交基得:

$y_3=(1,0,0,0)^T, y_4=(0,1,0,0)^T$ 再令 $U=(y_1,y_2,y_3,y_4)$,

则
$$A=U\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}V^H,$$
从而

$$A^{+}=V\begin{pmatrix}\Delta^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}U^H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

广义加号逆

- 广义逆不具有通常意义下逆矩阵的下列性质：
  - $(AB)^+ \neq B^+A^+$
  - $\left(A^k\right)^+ \neq \left(A^+\right)^k$
  - $AA^+ \neq A^+A$
  - A与A^+的非零特征值并不互为倒数。

广义加号逆

例： $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

由 $A=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ 可得 $A^{+}=A$

又B为满秩矩阵，则 $B^{+}=B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$B^{+}A^{+}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (AB)^{+}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{+}\neq B^{+}A^{+}$$

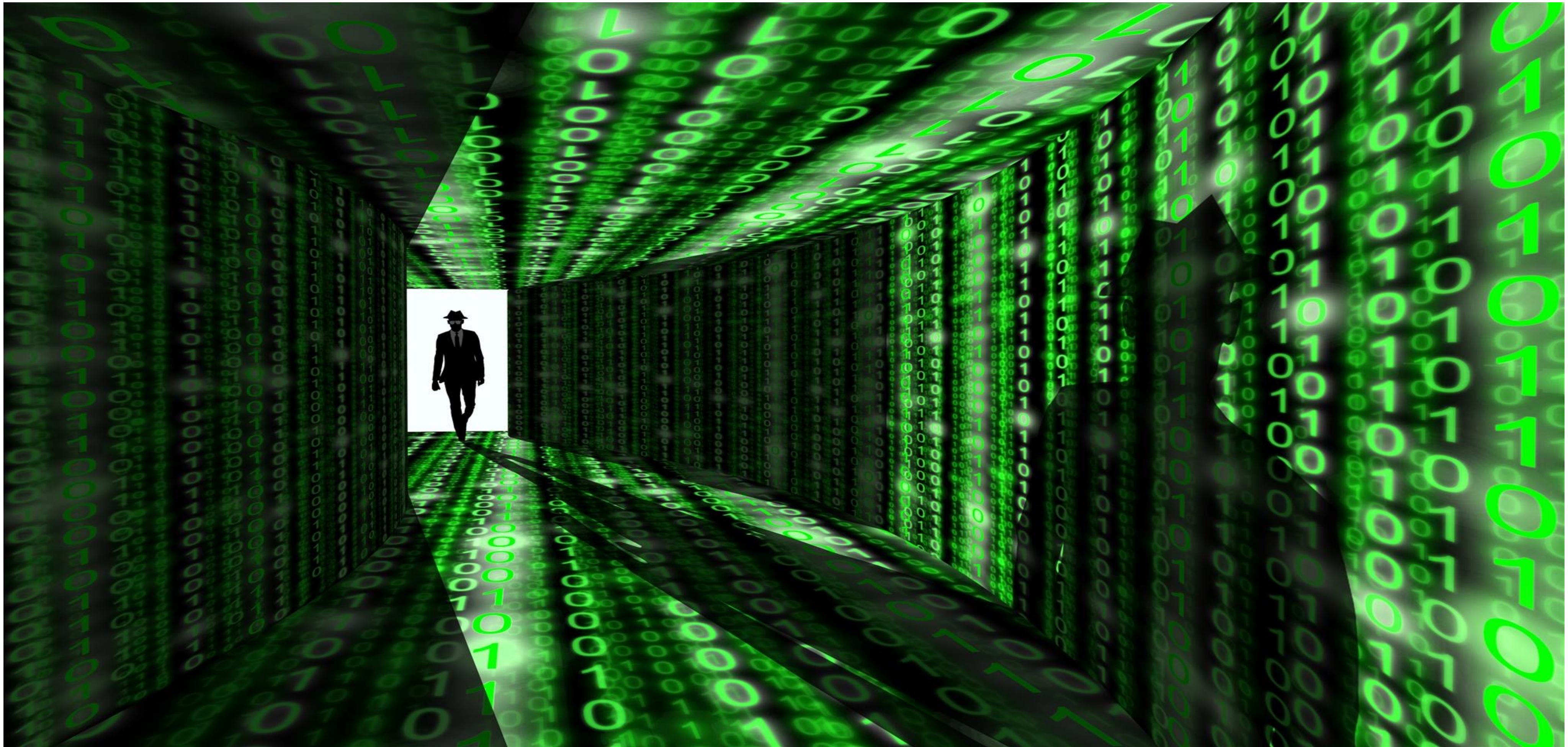
广义加号逆

例 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

由 $A=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ 可得 $A^{+}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

可验证

$$\left(A^{k}\right)^{+}\neq\left(A^{+}\right)^{k}\qquad AA^{+}\neq A^{+}A$$



Thanks