



矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

矩阵分解

□ 矩阵分解：

➤ 常见矩阵标准型及分解

三角分解

满秩分解

谱分解

➤ Schur分解与正规矩阵

➤ 奇异值分解

矩阵分解

□ 常见的标准形

➤ 等价标准形

$$A_{m \times n} = P_{m \times m} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{n \times n}$$

➤ 相似标准形

$$A_{n \times n} = P J_A P^{-1}$$

➤ 合同标准形

$$A_{n \times n} = C \Lambda C^T$$


$$A^T = A$$

三角分解

- 定义：设矩阵 A 是 n 阶复矩阵，如果 A 可以分解成一个下三角矩阵 K 与一个上三角矩阵 U 的乘积，即 $A=KU$ ，称 A 可以三角分解。
- 定义：如果 A 可以分解为一个单位下三角矩阵 L 与一个上三角矩阵 U 的乘积，即 $A=LU$ ，称 A 可以LU分解。
- 定义：如果 $A=LDU$ ，其中 L 是单位下三角矩阵， U 是单位上三角矩阵， D 是对角矩阵，称 A 可以LDU分解。

□ 例：解方程

[illegible]

其矩阵形式为 $Ax = b$

- 当n充分大，用公式 $X=A^{-1}b$ 计算的元素是非常困难的。因此需要Gauss消元法

三角分解

假定能把矩阵 A 写成下列两个矩阵相乘的形式: $A=LU$ 其中 L 为下三角矩阵, U 为上三角矩阵。
则可以把线性方程组 $Ax=b$ 写成

$$Ax = (LU)x = L(Ux) = b$$

令 $Ux = y$, 则原线性方程组

$$Ax = b \iff \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

首先求解向量 y 使 $Ly = b$

然后求解 $Ux = y$,

从而求解线性方程组 $Ax = b$ 的目的.

三角分解

例:求 A 的三角分解 (待定系数法)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

解答:设 $A = LU$, 即:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三角分解

□ 求解过程

由此: $l_{11} = 1, l_{21} = 1, l_{31} = 2, l_{41} = 1$

$$l_{11}u_{12} = 0 \Rightarrow u_{12} = 0, u_{13} = 2, u_{14} = 1$$

$$l_{21}u_{12} + l_{22} = 2 \Rightarrow l_{22} = 2 - l_{21}u_{12} = 2$$

$$u_{23} = \frac{4 - u_{13}l_{21}}{l_{22}} = 1 \quad \begin{aligned} l_{32} &= a_{32} - u_{12}l_{32} = 1 - 0 = 1 \\ l_{33} &= a_{33} - u_{13}l_{31} - u_{23}l_{32} = 1 \end{aligned}$$

$$u_{34} = \frac{a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}}{l_{33}} = 1 \quad l_{42} = a_{42} - u_{12}l_{41} = 2$$

$$l_{43} = a_{43} - u_{13}l_{41} - u_{23}l_{42} = -2 \quad l_{44} = 5$$

三角分解

□ 求解过程

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L\tilde{U}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{L}D\tilde{U}$$

三角分解

高斯消元法

第1步: 设 $A^{(0)} = A$, 其元素 $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ 记A的k阶顺序主子式为 A_k

第2步: 令 $c_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$

$$\Delta_1 = a_{11}^{(0)} \neq 0$$

LDU

对应于Gauss消元程序, 构造消元矩阵

$$PA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -c_{21} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

则有:

$$L_1 A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ c_{21} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array} \right] \quad \text{下三角}$$

三角分解

□ 高斯消元法

➤ 第3步：设 $|A| = |A^{(0)}| = |L_1 A^{(0)}|$ ，A的2阶顺序主子式为 $A_2 = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)}$
令 $c_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (i = 3, 4, \dots, n) \quad (\text{若 } a_{22}^{(1)} \neq 0)$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -c_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & -c_{n2} & -c_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} = A^{(2)} \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & c_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

➤ 第2步：计算三阶顺序主子式 $\Delta_3 = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)}$ ，继续构造高斯消元矩阵

三角分解

□ 高斯消元法

➤ 第r步：设 $\Delta_r \neq 0$ ，A的r阶顺序主子式为

$$L_r A^{(r-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{1r}^{(0)} & a_{1r+1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{rr}^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & a_{rn}^{(r-1)} \\ & & a_{r+1r+1}^{(r)} & a_{r+1n}^{(r)} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & a_{nr+1}^{(r)} & a_{nn}^{(r)} \end{pmatrix} = A^{(r)} \quad L_r = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & -c_{r+1,r} & 1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & -c_{nr} & -c_{n,r+1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad L_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & c_{r+1,r} & 1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & c_{nr} & c_{n,r+1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

➤ 第n-1步：

$$L_{n-1} A^{(n-2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{13}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{23}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n-1,n}^{(n-2)} \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} = A^{(n-1)} \quad L_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -c_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & c_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_{n,n-1} = \frac{a_{n,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}$$

三角分解

定理： $A \in C_n^{n \times n}$ 可作唯一三角分解 $A = LDU$ 的充要条件为：

$$\Delta_k \neq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

其中： $\Delta_k = \det A_k$ 为 A 的顺次主子式， L 或 U 对角线元素为 1。

记：

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & \\ l_{21} & \mathbf{1} & & \\ & & \cdots & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & \cdots & & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

三角分解

LDU 分解 唯一的. 主要条件

A 的各阶顺序主子式 $\Delta_k \neq 0$

推论: 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且 $\Delta_k \neq 0 \quad k=1, 2, \dots, n-1$ 则

A 唯一分解成: $A = \tilde{L} D \tilde{U}$

其中, D 为对角阵 $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix} \quad d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$

□ 证明:

充分性: $n=1$ 时 $(A)_{11} = a_{11} \quad L(1) \quad U(1) \quad D = \{a_{11}\}$

$\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & T_n \\ \hline U_n^T & a_{nn} \end{array} \right)$

$n=n-1$ 时都成立 $(A)_{(n-1) \times (n-1)} = L_{n-1} D_{n-1} U_{n-1}$

故: $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & T_n \\ \hline U_n^T & a_{nn} \end{array} \right] \quad A_{n-1} \text{ 具有唯一的 LDU 分解}$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & T_n \\ \hline U_n^T & a_{nn} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline \begin{pmatrix} T_n^T \\ L_n \end{pmatrix} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} D_{n-1} \\ d_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} U_{n-1} \quad U_n \\ \hline 0 \quad 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} A_{n-1} = L_{n-1} D_{n-1} U_{n-1} \\ T_n = L_{n-1} D_{n-1} U_n \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ U_n^T = \begin{pmatrix} T_n^T \\ L_n \end{pmatrix} D_{n-1} U_{n-1} \end{matrix} ; a_{nn} = L_n^T D_{n-1} U_n + d_n$$

三角分解

□ 高斯矩阵消元法

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

➤ 解：因为 $\Delta_1=2$, $\Delta_2=5$, 所以A有唯一的LU分解, 令

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{则} \quad L_1 A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{则} \quad L_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

三角分解

□ 高斯矩阵消元法

➤ 由于

$$L^{-1} = L_2 L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \therefore L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = A^{(0)} = L_1^{-1} A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} A^{(2)} = LU$$

➤ 从而得到矩阵A的LU分解

$$A = LA^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三角分解

□ 矩阵分解：

➤ 常见矩阵标准型及分解

三角分解

满秩分解

谱分解

➤ Schur分解与正规矩阵

➤ 奇异值分解

三角分解

□ 设 A 是复数域 C 上, 秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, 记为 $A \in C_r^{m \times n}$

定理: 设 $A \in C_r^{m \times n}$, 那么存在 $B \in C_r^{m \times r}$, $C \in C_r^{r \times n}$

使得: $A = BC$

其中 B 为列满秩矩阵, C 为行满秩矩阵。我们称此分解为矩阵的满秩分解。

三角分解

证明：假设矩阵 A 的前 r 个列向量是线性无关的，
对矩阵 A 只实施行初等变换可以将其化成

$$\begin{bmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{即存在 } P \in C_m^{m \times m} \text{ 使得 } PA = \begin{bmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{于是有 } A = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & D \end{bmatrix} = BC$$

三角分解

$$\text{其中 } B = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \in C_r^{m \times r}, C = \begin{bmatrix} I_r & D \end{bmatrix} \in C_r^{r \times n}$$

注: 如果 A 的前 r 列线性相关, 那么只需对 A 作列变换使得前 r 个列是线性无关的。然后重复上面的过程即可。这样存在 $P \in C_m^{m \times m}$, $Q \in C_n^{n \times n}$

$$\text{且满足 } PAQ = \begin{bmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & D \end{bmatrix} Q^{-1} = BC$$

满秩分解

□ 三种方法：

➤ 行列初等变换

➤ 行初等变换

➤ Hermite标准型

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_m \\ \hline I_n & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初等变换}} \left[\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & P \\ 0 & 0 & \vdots \\ \hline Q & & 0 \end{array} \right].$$

行初等变换法

只对 A 做行初等变换, 可得到阶梯形矩阵: $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $\text{rank}(C) = \text{rank}(A)$
有可逆矩阵 P , 使

$$PA = \begin{pmatrix} C \\ - \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = P^{-1} \begin{pmatrix} C \\ - \\ 0 \end{pmatrix} = (B \mid B_1) \begin{pmatrix} C \\ - \\ 0 \end{pmatrix} = BC.$$

$$(A \mid I_m) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{c|c} C & P \\ - & \\ 0 & \end{array} \right)$$

B 为 P^{-1} 的前 r 列, C 是 A 化为阶梯形中的非零行. $A = BC$.

满秩分解

□ 例 1:

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的满秩分解.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A = BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ Hermite标准型法

设 $B \in C_r^{m \times n}$, 满足

- (1) B 的前 r 行每一行至少含一个非零元, 且第一个非零元是 1
- (2) B 的后 $m - r$ 行都是零行
- (3) 设 B 的第一行的第一个 1 元所在的列为 j_1 列,
第二行的第一个 1 元所在的列为 j_2 列 $\cdots$,
第 r 行的第一个 1 元所在的列为 j_r 列, 则
$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$$
- (4) $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 构成单位阵的前 r 列,

称 B 为 Hermite 标准形。

定理： 设 $A \in C_r^{m \times n}$, 通过行初等变换将 A 化成 Hermite 标准形 B , 取 B 的前 r 行为 G , A 的 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列构成 F , 则 $A = FG$ 为满秩分解。

满秩分解

□例 2: 分别求下面三个矩阵的满秩分解

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

解：(1) 对此矩阵只实施行变换可以得到

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可知 $\text{rank}(A) = 2$
且该矩阵第一列，第三列是线性无关的。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \in C_2^{4 \times 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in C_2^{2 \times 6}$$

解 (2) 对此矩阵只实施行变换可以得到

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\text{rank}(A) = 1$ ，且此矩阵的第三，第四，第五列任意一列都是线性无关的，所以选取哪一列构成列满秩矩阵均可以。

选取

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in C_1^{2 \times 1},$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3] \in C_1^{1 \times 5}$$

也可以选取

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in C_1^{2 \times 1},$$

$$C = \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \right] \in C_1^{1 \times 5}$$

解：(3) 对此矩阵只实施行变换可以得到

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\text{rank}(A) = 2$,

且容易看出此矩阵的
第二列和第四列是线
性无关的, 选取

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in C_2^{3 \times 2},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in C_2^{2 \times 5}$$

上述例子可以看出矩阵的满秩分解形式并不唯一。一般地我们选取阶梯型矩阵主元所在的列对应的列向量构成列满秩矩阵，将阶梯型矩阵全为零的行去掉后即可构成行满秩矩阵。但是不同的分解形式之间有如下联系：

$$A = BC = B_1 C_1$$

定理： 如果 $A = BC = B_1 C_1$ 均为矩阵 A 的满秩分解，那么

(1) 存在矩阵 $\theta \in C_n^{n \times n}$ 满足 $B = B_1 \theta$, $C = \theta^{-1} C_1$

(2)
$$\begin{aligned} & C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H \\ &= C_1^H (C_1 C_1^H)^{-1} (B_1^H B_1)^{-1} B_1^H \end{aligned}$$

矩阵分解

□ 矩阵分解：

➤ 常见矩阵标准型及分解

三角分解

满秩分解

谱分解

➤ Schur分解与正规矩阵

➤ 奇异值分解

可对角化矩阵的谱分解

□ 两类矩阵的谱分解：

➤ 可对角化矩阵

➤ 正规矩阵

□ 将方阵分解成用谱加权的矩阵和

➤ **谱**：设 $A \in F^{n \times n}$ ，

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

则 A 的谱 $= \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ 。

可对角化矩阵的谱分解

□ 可对角化矩阵的谱分解：

$$A = \sum_{i=1}^s \lambda_i P_i, \text{ P具性质: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^s P_i = I \\ P_i^2 = P_i \\ P_i P_j = 0 \quad i \neq j \end{array} \right.$$

幂等矩阵

意义： 可对角化矩阵可以分解成以谱加权的幂等矩阵的加权和

可对角化矩阵的谱分解

□ 幂等矩阵性质（为谱分解做准备）

定理 对于 $P \in F^{n \times n}$ ， $P^2 = P$ ，则

- 矩阵 P^H 和矩阵 $(I - P)$ 仍然是幂等矩阵。
- P 的谱 $\subseteq \{0, 1\}$ ，且 P 可相似于对角形。
- $F^n = N(P) \oplus R(P)$
其中 $N(P) = V_{\lambda=0}$ ， $R(P) = V_{\lambda=1}$
- P 和 $(I - P)$ 的关系：
 $N(I - P) = R(P)$ ， $R(I - P) = N(P)$

可对角化矩阵的谱分解

□ 谱分解定理

定理 设矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 的谱为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 则 A 可以对角化的充分必要条件是 A 具有如下的分解式:

$$A = \sum_{i=1}^s \lambda_i P_i \quad ;$$

其中

$$(1) \quad P_i P_j = \begin{cases} P_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^s P_i = I$$

可对角化矩阵的谱分解

□ 如何谱分解？

➤ 第一步：矩阵对角化

➤ 第二步：

$$A = P \left[\sum_{i=1}^s \lambda_i Q_i \right] P^{-1} = \sum_{i=1}^s \lambda_i (P Q_i P^{-1}).$$

例：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

可对角化矩阵的谱分解

□ 如何谱分解?

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A = 3P_1 - P_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5) \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

$$x_1 = (1, -1, 0)^T, x_2 = (1, 0, -1)^T, x_3 = (1, 1, 1)^T \quad A = -E_1 + 5E_2$$

可对角化矩阵的谱分解

□ Hermite 矩阵的谱分解

定理: 设A是秩为k的半正定的Hermite 矩阵, 则A可以分解为下列半正定矩阵的和。

$$A = v_1 v_1^H + v_2 v_2^H + \cdots + v_k v_k^H$$

证明:

存在酉矩阵使A对角化

半正定 $\rightarrow$ 特征值非负 $\rightarrow$ 进一步分解



Thanks