



矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

Jordan标准型

□ Jordan标准型：

- 矩阵对角化
- Jordan矩阵
- 最小多项式 (λ 函数)

最小多项式

□ 定义： 设 $g(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \lambda + a_m$ 为 m 次复多项式, $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 称

$$g(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m I_n$$

为 方阵多项式.

$$\begin{bmatrix} A^m & & \\ & A^m & \\ & & \ddots \\ & & & A^m \end{bmatrix}$$

□ 性质1 若方阵 A 与 B 相似, 即 $B = P^{-1}AP$ 则

$$\underline{g(B) = P^{-1}g(A)P}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

□ 性质2 若 $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$, 则

$$g(A) = \text{diag}\{g(A_1), g(A_2), \cdots, g(A_s)\}$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} g(A_1) & & \\ & g(A_2) & \\ & & \ddots \\ & & & g(A_s) \end{bmatrix}$$

最小多项式

□ 定义： 设 A 为 n 阶方阵， $g(\lambda)$ 为多项式，若

$$g(A) = O$$

则称 $g(\lambda)$ 为 A 的 化零多项式。

□ 例1：

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = 0$$

$g(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ 是 A 的化零多项式。

$$g(A) = (A - 2I)^2 = O$$

最小多项式

□例2: 设 $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{r \times r}$ 试求 U 的化零多项式.

□例3: 任意 n 阶方阵是否都有化零多项式?

定性分析 $\because \dim \mathbb{C}^{n \times n} = n^2$

$\therefore \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}, A^{n^2}, A^{n^2-1}, \dots, A, A^0$ 必线性相关

故至少存在一个 n^2 次多项式是 A 的化零多项式

最小多项式

□ 定理：(Cayley-Hamilton) 阶方阵 A 的特征多项式

$$f_A(\lambda) = |\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

是 A 的化零多项式，即有 $f_A(A) = O$.

- 推论1：任何 n 阶方阵 A 都具有次数不超过 n 的化零多项式。
- 推论2： A 的任何次方阵多项式都可以表示为次数不超过 $n-1$ 的方阵多项式。

最小多项式

证明 设 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$

A 的若当标准形为 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix}$ 其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$

且 $\sum_{i=1}^s n_i = n$, $(\lambda_i I_{n_i} - J_i)^{n_i} = 0$,

从而存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$. 因此得到

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = (J - \lambda_1 I_n)^{n_1} (J - \lambda_2 I_n)^{n_2} \cdots (J - \lambda_s I_n)^{n_s}$$

最小多项式

$$J - \lambda_i I_n = \begin{pmatrix} J_1 - \lambda_i I_{n_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & J_{i-1} - \lambda_i I_{n_{i-1}} & \\ & & & U_i & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_s - \lambda_i I_{n_s} \end{pmatrix} \quad \text{其中 } U_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

$$U_i^{n_i} = 0, i = 1, 2, \dots, s$$

$$(J - \lambda_i I_n)^{n_i} = \begin{pmatrix} (J_1 - \lambda_i I_{n_1})^{n_i} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & (J_{i-1} - \lambda_i I_{n_{i-1}})^{n_i} & \\ & & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & (J_s - \lambda_i I_{n_s})^{n_i} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$P^{-1} f(A) P = f(P^{-1} A P) = (J - \lambda_1 I_n)^{n_1} (J - \lambda_2 I_n)^{n_2} \cdots (J - \lambda_s I_n)^{n_s} \quad \text{从而 } f(A) = 0.$$

最小多项式

□性质3: 方阵的化零多项式是否唯一?

设 $g(\lambda)$ 是 A 的化零多项式, $p(\lambda)$ 是任一多项式, 则

$$p(A)g(A) = O$$

即 $p(\lambda)g(\lambda)$ 都是 A 的化零多项式.

□例4: 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5×5
 $A_{n \times n}$
 $A^{100} = ?$ $99 \mid 100$

试证 $A^n = A^{n-2} + A^2 - I_3 \quad (n \geq 3)$

最小多项式

证明 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)$

令
$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \lambda^n - \lambda^{n-2} - \lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^{n-2} - 1) \\ &= (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)(\lambda^{n-3} + \lambda^{n-4} + \cdots + \lambda + 1) \end{aligned}$$

由 *Hamilton-Cayley* 定理得 $f(A) = 0$, 故

$$g(A) = A^n - A^{n-2} - A^2 + I = 0$$

移项得 $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$.

最小多项式

□例5: 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $f(\lambda) = \lambda^3$

计算 $\underline{g(A) = 2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I_3}$

□例6: 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

计算 A^{-1}

最小多项式

□ 定义:

设 A 为 n 阶方阵, 称 A 的次数最小的首一^{化零}多项式为 A 的 **最小多项式**, 记为 $m_A(\lambda)$.

最高次项系数为1

□ 例7: 设 $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{r \times r}$, 试求 U 的最小多项式 $m_U(\lambda)$.

问 设 Jordan 块 $J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{r \times r}$, 则 $m_J(\lambda) = ?$ r $(\lambda - \lambda_0)^{r-1}$

$$m_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r$$

即初等因子是对应
Jordan 块的最小多项式

最小多项式

□ **定理：** 设 n 阶方阵 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda)$ ，则

➤ A 的任何化零多项式 $g(\lambda)$ 都能被 $m_A(\lambda)$ 整除.

➤ A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 是唯一的.

➤ λ_0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow m_A(\lambda_0) = 0$.

$$f(\lambda) = g(\lambda) \cdot h(\lambda)$$

问

$m_A(\lambda)$ 具有怎样的结构?

设

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

则

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

其中

$$1 \leq m_i \leq n_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, s).$$

最小多项式

□例8: 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $m_A(\lambda)$.

□例9: 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 0 \\ & & 0 & -1 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $m_A(\lambda)$.

最小多项式

□例10:

$$\text{设 } A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & & & & \\ \hline & & 1 & 2 & 0 & \\ & & 0 & -1 & 1 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right], \text{ 求 } m_A(\lambda).$$

最小多项式

□ 一般 n 阶方阵 A 的最小多项式:

设 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \text{diag}\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_s(\lambda_s)\}$$

Jordan 块的最小多项式 = 对应的初等因子

$$\therefore m_{J_i}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$$

其中 r_i 是 $J_i(\lambda_i)$ 中基本 Jordan 块的最大阶数.

$$\therefore m_A(\lambda) = m_J(\lambda)$$

$$= (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

最小多项式

□ 例 11:

设 $J = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix}$, 求 $m_A(\lambda)$.

$(\lambda - 2)$
 $(\lambda - 2)^2$
 $(\lambda - 3)^2$
 $(\lambda - 3)^3$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)^3$$

最小多项式

□ **定理：** 设 A 是 n 阶矩阵， $D_{n-1}(\lambda)$ 是 A 的 $n-1$ 阶行列式因子，则 A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = \frac{|\lambda I - A|}{D_{n-1}(\lambda)} = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)} = d_n(\lambda)$$

这里 $d_n(\lambda)$ 是 A 的第 n 个不变因子。

□ **定理：** n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow m_A(\lambda) = 0$ 无重根.

最小多项式

□例12：设 A 的特征多项式和最小多项式分别为

$$f_A(\lambda) = (\lambda - 3)^4(\lambda - 2)^2, m_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2)^2$$

试确定 A 的所有可能Jordan标准形.

特征值估计

□ Getschgorin (盖尔) 圆盘定理

定理： 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 则他的所有特征值都落在复平面上的 n 个圆盘 $D_i(A) = \{z \mid |z - a_{ii}| \leq P_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $P_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

- 定理只说明 A 的 n 个特征值一定落在 n 个圆盘的并集内, 但不能保证每个圆盘都含有 A 的特征值;
- 对 A' 应用圆盘定理, 可以得到 A 的关于列的相应结果.

特征值估计

□ Getschgorin (盖尔) 圆盘定理

► 例：

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

A 的特征值都落在圆盘 $D_1 = \{z \mid |z + 4| \leq 10\}$ 和 $D_2 = \{z \mid |z - 6| \leq 1\}$ 内，事实上 A 的特征值为 $1 \pm \sqrt{15}$, D_2 中不含 A 的特征值.

特征值估计

□ Getschgorin (盖尔) 圆盘定理

定理： 设 A 的 n 个圆盘中有 s 个圆盘构成了一个连通域 G ，它与其余 $n - s$ 个圆盘都不相交，则 A 的 n 个特征值中有且仅有 s 个落入 G 中。

- 孤立的盖尔圆盘中有且只有一个 A 的特征值
- 两个连通的盖尔圆盘中恰有两个特征值，但不能保证每个圆盘都一定含有 A 的特征值。

特征值估计

□ 特征值范围估计

- 为了得到有效的估计，往往希望每个圆盘只包含 A 的一个特征值，这就需要将每个圆盘的半径适当缩小
- 对矩阵 A 施行相似变换后再应用圆盘定理。一般为简便起见，可选择对角矩阵作相似变换矩阵。

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad \text{令 } P = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

$$\text{其中 } d_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n), \quad \text{则 } B = PAP^{-1} = \left(a_{ij} \frac{d_i}{d_j} \right).$$

特征值估计

□ 特征值范围估计

- 对矩阵 A 施行相似变换后再应用圆盘定理。一般为简便起见，可选择对角矩阵作相似变换矩阵。

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad \text{令 } P = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$\text{其中 } d_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n), \quad \text{则 } B = PAP^{-1} = \left(a_{ij} \frac{d_i}{d_j} \right).$$

d_j 的选取原则：

欲使第 j 个圆盘缩小，可取 $d_j < 1$ ，其余的 $d_k = 1$ ；

欲使第 j 个圆盘放大，可取 $d_j > 1$ ，其余的 $d_k = 1$ 。

特征值估计

□ 特征值范围估计

➤ 例：

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.01 & 0.12 \\ 0.01 & 0.8 & 0.13 \\ 0.01 & 0.02 & 0.4 \end{pmatrix}$$

由圆盘定理可知 A 的特征值落在圆盘

$$D_1 = \{z \mid |z - 0.9| \leq 0.13\}, \quad D_2 = \{z \mid |z - 0.8| \leq 0.14\}$$

和 $D_3 = \{z \mid |z - 0.4| \leq 0.03\}$ 内.

➤ 第一、二个圆盘构成一个连通部分，而第三个圆盘构成一个连通部分，这样有两个特征值不能分离.

特征值估计

□ 特征值范围估计

➤ 方法一：

$$A^T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.8 & 0.02 \\ 0.12 & 0.13 & 0.4 \end{pmatrix}$$

由圆盘定理可知 A^T 的特征值落在圆盘

$$D_1 = \{z \mid |z - 0.9| \leq 0.02\}, \quad D_2 = \{z \mid |z - 0.8| \leq 0.03\}$$

$$\text{和 } D_3 = \{z \mid |z - 0.4| \leq 0.25\} \text{ 内.}$$

➤ A^T 的三个圆盘都是孤立的，因而每个圆盘中都有一个特征值。由于 A 与 A^T 有相同的特征值，故 A 的特征值分别在上述三个圆盘中，都是实数。

特征值估计

□ 特征值范围估计

➤ 方法二： 令 $P = \text{diag}(1, 1, 10)$, 则

$$B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.01 & 0.012 \\ 0.01 & 0.8 & 0.013 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

B 的圆盘为

$$D_1 = \{z \mid |z - 0.9| \leq 0.022\}, \quad D_2 = \{z \mid |z - 0.8| \leq 0.023\}$$

$$\text{和 } D_3 = \{z \mid |z - 0.4| \leq 0.3\}$$

➤ B 的三个圆盘都是孤立的，因而每个圆盘中都有一个特征值。由于 A 与 B 有相同的特征值，故 A 的特征值分别在上述三个圆盘中，所以都是实数。

特征值估计

□ 其他参考知识

- 严格占优矩阵
- 对角占优矩阵



Thanks