



矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

Jordan标准型

□ Jordan标准型：

- 矩阵对角化
- Jordan矩阵
- 最小多项式 (λ 函数)

Jordan标准型

□ 目的:

- 使得矩阵形式简单
- 矩阵变换时其结构不变

□ 问题:

- 什么矩阵结构最简单?
- 能否变换以及如何变换?

Jordan标准型

□ 特征值与特征向量:

定义 设 T 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, 如果存在 $\lambda \in P$, 及 $\xi \in V$, $\xi \neq 0$ 使得

$$T(\xi) = \lambda\xi$$

则称 λ 是 T 的一个**特征值**, 而 ξ 称为 T 属于特征值 λ 的一个**特征向量**。

□ 求解特征值与特征向量

► 设 λ 是 n 阶方阵 A 的特征值, x 是 A 属于特征值 λ 的特征向量, 则 $Ax=\lambda x$ 或者

$$(\lambda I - A)x=0$$

则上述齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式等于零。即

$$|\lambda I - A| = 0$$

Jordan标准型

□ 若线性变换为如下形式?

例 设单位向量 $u = (2/3, -2/3, -1/3)$, 给定 $\mathbb{R}^3$ 上的
线性变换 $P(x) = x - (x, u)u$ 。



没有矩阵A

Jordan标准型

定理： 设 V 是线性变换 T 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 A ，则 A 的特征值 λ 就是变换 T 的特征值；若 X 是 A 的特征向量，则 $\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)X$ 就是 T 的特征向量。

□ 求解过程

- 选择一组基 $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ ，求解线性变换 T 的矩阵 A
- 求解 A 的特征值：即特征多项式的根
- 求解矩阵 A 关于 λ_i 的特征向量 X_i ，即 $(\lambda_i I - A) X = 0$ 的非零解，它们给出特征向量 X_i 在基上的坐标。

□ 特征子空间定义

定义： 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间， T 是 V 的线性变换，对 T 的任一特征值 λ_0 ， T 属于 λ_0 的全部特征向量以及零向量一起所组成的集合构成 V 的一个子空间，称为 T 的属于特征值 λ_0 的特征子空间。记为 V_{λ_0} ，即

$$V_{\lambda_0} = \{\alpha | T(\alpha) = \lambda_0 \alpha\}$$

□ 特征子空间性质

- V_{λ_0} 是 V 在 T 下不变子空间
- T 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数是 T 属于特征值 λ_0 线性无关的特征向量的最大个数
- $V_{\lambda} = N(T - \lambda I)$

证明思路:

- (1) 根据定义证明该子空间的向量的线性变换仍然属于该子空间
- (2) 可以采用反证法
- (3) 证明两个子空间互相包含

Jordan标准型

□ 特征子空间性质 (课本)

定理: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是线性空间 $V_n(F)$ 上线性变换 T 的 s 个互异特征值。 V_{λ_i} 是 λ_i 的特征子空间, 则有:

- (1) V_{λ_i} 是 T 的不变子空间
- (2) $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$
- (3) 若 λ_i 是 T 的 k 重特征值, 则 $\dim V_{\lambda_i} \leq k$

证明:

定理 2.2 说明 V_{λ_i} 与 V_{λ_j} 满足 $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} \subseteq V_n(F)$,

$\sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} \leq \dim V_n(F) = n$. 如果 $\sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} = n$, 则有

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} = V_n(F).$$

Jordan标准型

□例：设矩阵 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C^{n \times m}$, 证明 AB 和 BA 具有相同的非零特征值。

证明：方法 - 矩阵扩充

Jordan标准型

□ 线性变换对角化

定义： 设 T 是线性空间 V 一个线性变换，若存在一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 使得 T 在该基下的矩阵是对角阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，就称 T 可以对角化。

若线性变换 T 可对角化，设 T 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的矩阵是 A ，且由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵是 P ，则

$$P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Jordan标准型

□ 线性变换对角化

定理： 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是T有n个线性无关的特征向量。

定理： 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是：

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V_n(F).$$

Jordan标准型

□ 充要条件证明

定理：线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是T有n个线性无关的特征向量。

$$A \text{ 可以对角化, 则存在可逆矩阵 } P \text{ 使得 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$\text{令 } P = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ 则 } AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

即 $Ax_i = \lambda_i x_i$, P 可逆, 知道 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性无关,
故 A 有 n 个线性无关的特征向量。

Jordan标准型

□ 线性变换对角化

定理：线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是：

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V_n(F).$$

由于 $\dim N(\lambda_i I - A) = m_i, i=1, 2, \dots, s.$

因为 $N(\lambda_1 I - A) + N(\lambda_2 I - A) + \cdots + N(\lambda_s I - A) \subseteq C^n.$

$$\dim \sum_{i=1}^s N(\lambda_i I - A) = \sum_{i=1}^s \dim N(\lambda_i I - A) - \sum_{i=1}^s m_i = n = \dim C^n.$$

所以 $(\lambda_1 I - A) \oplus N(\lambda_2 I - A) \oplus \cdots \oplus N(\lambda_s I - A) = C^n.$

Jordan标准型

□例：已知 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是空间 $V_3(F)$ 的基， T 是空间上如下定义的线性变换，

$$T(\alpha_1) = \alpha_1$$

$$T(\alpha_2) = 2\alpha_2$$

$$T(\alpha_3) = \alpha_1 + t\alpha_2 + 2\alpha_3$$

讨论： t 为何值， T 有对角矩阵表示？

解： T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

T 可以对角化当且仅当 A
可以对角化，当且仅当
 $r(2I-A)=3-2=1$ ，当且仅当 $t=0$.

Jordan标准型

□例：证明 $P_4[x]$ 上的微分变换 d/dx 没有对角阵表示。

证明：直接计算

□例：证明幂等矩阵($A^2=A$)、乘方矩阵($A^2=I$)有对角矩阵表示

➤有时也称幂等变换($T^2=T$)、乘方变换($T^2=I$)

证明：充分性无需证明，必要性要证明，
利用线性空间的维度关系

Jordan标准型

□ 幂等矩阵($A^2=A$)、 乘方矩阵($A^2=I$)有对角矩阵表示。

证明： 设 λ 是 A 的任一特征值， x 是对应的特征向量，则
 $Ax=\lambda x, A^2x=\lambda^2x=\lambda x$, 所以 $\lambda=0$ ，或者 1 。

设 $r(A)=r$, 则 $AX=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个线性无关的解向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$, 也即 A 恰有 $n-r$ 个属于特征值 0 的线性无关的特征向量。又 $A^2=A$ ，所以 $r(I-A)=n-r$, 故 $(I-A)X=0$ 基础解系恰含 r 个

解向量 $\alpha_{n-r+1}, \dots, \alpha_n$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}, \dots, \alpha_n$ 线性无关，令

$$P=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}, \dots, \alpha_n), \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordan标准型

□ Jordan标准型：

- 矩阵对角化
- Jordan矩阵
- 最小多项式 (λ 函数)

Jordan标准型

□ 目标：对线性空间中的线性变换 T ，求一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ，使 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下矩阵 J 的形式尽可能简单。 J 称为若当矩阵。

□ 发现者：Marie Ennemond Camille Jordan
(马里·埃内芒·卡米尔·若当)

Jordan标准型

□ 定义 形如

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

的矩阵，称为若当块，由若干个若当块构成的分块对角阵，称为若当矩阵，记为 J 。即

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

是若当矩阵。

Jordan标准型

□例：下列矩阵哪些是Jordan块？

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jordan标准型

□ Jordan 矩阵标准型

设 Jordan 形矩阵

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s),$$

其中 $J_i = J_i(\lambda_i)$ 是 n_i 阶 Jordan 块, 则

- (1) J 的初等因子是 $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$;
- (2) J 恰有 s 个线性无关的特征向量;

Jordan标准型

□ Jordan 矩阵标准型

设 $J_i = J_i(\lambda_i)$ 是 n_i 阶 Jordan 块, 则

- (1) J_i 有唯一特征值 λ_i ;
- (2) 特征值 λ_i 的代数重数为 n_i , 几何重数为 1;
- (3) J_i 有唯一初等因子 $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$;

Jordan标准型

□ Jordan 矩阵存在性定理

定理：在复数域上，任何 n 阶方阵 A 均相似于如下的若当矩阵 J ，称为矩阵 A 的Jordan标准形，即存在阶可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

其中 $J_i(\lambda_i)$ 为 n_i 阶Jordan块， $\sum_{i=1}^s n_i = n$ 。即存在 n 阶可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP = J$ 。若不计Jordan块排列次序，则 A 的Jordan标准形是唯一的。

Jordan标准型

□ Jordan 矩阵标准型

问题：寻找可逆矩阵P,使得任意矩阵A可以变换成Jordan标准型矩阵，即

$$P^{-1}AP = J_A$$

$$J_A = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}.$$

➤ 1、A的特征多项式和特征值

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

(λ_i 是互异特征根、 k_i 是特征根重数)

Jordan标准型

□2、根据相似变换 $AP = P J_A$ ，将 P 拆分为列向量

$$A \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

$$(Ap_1 \quad Ap_2 \quad \cdots \quad Ap_s) = (p_1 J_1(\lambda_1) \quad p_2 J_2(\lambda_2) \quad \cdots \quad p_s J_s(\lambda_s))$$

$$Ap_i = p_i J_i(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

□3、取一Jordan块为例，继续拆分 $Ap_1 = p_1 J_1(\lambda_1)$ ：

$$J_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} J_{11}(\lambda_1) & & & \\ & J_{12}(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{1r}(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

Jordan标准型

$$J_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} J_{11}(\lambda_1) & & \\ & J_{12}(\lambda_1) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{1r}(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

其中 J_{1i} 为 n_i 阶 Jordan 块, $\sum_{i=1}^r n_i = k_1$, 由此可知

$$J_{1i}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}.$$

Jordan标准型

□4、展开得到线性方程组，也称为Jordan链条

$$(A - \lambda_i)\alpha = 0$$

$$(A - \lambda_i)y_2 = \alpha$$

$$(A - \lambda_i)y_3 = y_2$$

$$\dots\dots \dots\dots$$

□5、求解，直至不相容（线性方程中无解）

Jordan标准型

□例：已知 $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ ，求A的若当标准形J，并求可逆

矩阵P，使 $P^{-1}AP = J$ 。

□求解特征值 $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 4 & -2 & -10 \\ 4 & \lambda - 3 & -7 \\ 3 & -1 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^3 \end{pmatrix}$

有唯一的初等因子 $(\lambda - 2)^3$ ，从而的若当标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordan标准型

设 $P = (x_1, x_2, x_3)$ 使 $P^{-1}AP = J$ ，得到

$$\begin{aligned} Ax_1 &= 2x_1 & (2I - A)x_1 &= 0 \\ Ax_2 &= x_1 + 2x_2 & \text{即 } (2I - A)x_2 &= -x_1 \\ Ax_3 &= x_2 + 2x_3 & (2I - A)x_3 &= -x_2 \end{aligned}$$

由 $(2I - A)X = 0$ 解得基础解系为 $\alpha_1 = (2, 1, 1)^T$,

由 $(2I - A)X = -\alpha_1$ ，得解 $\alpha_2 = (0, -1, 0)^T$

再由 $(2I - A)X = -\alpha_2$ ，得解 $\alpha_3 = (-1, -3, 0)^T$

$$\text{于是令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 则 } P \text{ 可逆且 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordan标准型

□ 回顾性质

- 互异特征值数 = Jordan子矩阵数
- 某特征值代数重数决定Jordan子矩阵阶数
- 对于 λ_i , $(A - \lambda_i I)X = 0$ 解空间线性无关的特征向量的个数 = Jordan块数量
- 所有Jordan链构成矩阵P, 必有 $P^{-1}AP = J_A$



Thanks