



矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

线性变换

□ 线性变换

- 线性变换定义、性质
- 线性变换的矩阵
- 不变子空间
- 正交变换与U变换
- 线性空间到线性空间的变换

线性变换

□ T 是线性空间 V 到线性空间 U 的映射, $T: V \rightarrow U$,
满足线性性质:

1. $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$
2. $T(k\alpha) = kT(\alpha)$

则称映射 T 为线性空间 V 上的线性变换。

线性变换

□ 线性变换的性质

- (i) $T(0)=0$
- (ii) $T(-\alpha)=-T(\alpha)$
- (iii) $T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\cdots+k_mT(\alpha_m)$

例 $P[X]$ 中的微分变换: $T: f(X) \rightarrow f'(x)$

例 在 $P_n[x]$ 中, 定义 $T(p)=1 \quad \forall p \in P_n(x)$
则 T 不是 $P_n[x]$ 上的线性变换.

线性变换

□ 线性变换的象空间和零空间

设线性变换 $T: V \rightarrow V$,

➤ 像空间 $\text{Im}(T) = \{\beta: \exists \alpha \in V, \beta = T(\alpha)\}$

➤ 零空间 $\text{Ker}(T) = \{\alpha: \alpha \in V, T(\alpha) = 0\}$

定义: T 的秩 $= \dim R(T)$; T 的零度 $= \dim N(T)$

线性变换

□例 $\mathbb{R}^n$ 中的变换 T : 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个给定的矩阵,
 $\forall X \in \mathbb{R}^n, T(X) = AX$ 。

(1) T 是线性变换;

(2) $\text{Ker}(T)$ 是 $AX=0$ 的解空间;

(3) $\text{Im}(T) = \text{Span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 其中 a_i 是矩阵 A 的列向量;

(4) $\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) = n$

线性变换

□ 线性变换的矩阵与变换的坐标式

设 T 是线性空间 V 上的线性变换, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基

$$T\alpha_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n$$

$$T\alpha_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n$$

...

$$T\alpha_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n$$

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$$

T 的矩
阵

线性变换

□ 设 T_1, T_2 都是空间 V 中的线性变换，常见的用它们构成的新的变换：

(i) $T_1 + T_2 \Leftrightarrow \forall \alpha \in V,$

$$(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$$

(ii) $T_1 T_2 \Leftrightarrow \forall \alpha \in V,$

$$(T_1 T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$$

(iii) $kT \Leftrightarrow \forall \alpha \in V,$

$$(kT)(\alpha) = k(T(\alpha))$$

(iv) 若 T^{-1} 是可逆变换， $T^{-1} \Leftrightarrow T^{-1}(\beta) = \alpha$ 当且仅当 $T(\alpha) = \beta$ 。

线性变换

□ 设 $V_n(F)$ 上的线性变换 T_1, T_2 , 它们在同一组基下的矩阵: $T_1 \leftrightarrow A_1; T_2 \leftrightarrow A_2$

(i) $(T_1 + T_2) \leftrightarrow (A_1 + A_2)$

(ii) $(T_1 T_2) \leftrightarrow A_1 A_2$

(iii) $(kT) \leftrightarrow kA$

(iv) $T^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$

线性变换

□ 线性变换在不同基下的变换矩阵

➤ 两组基: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\},$

$$(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)C$$

➤ $T(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)A$

➤ $T(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n) = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)B$

$$\longrightarrow B = C^{-1}AC$$

定理: 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的

线性变换

□ 例 在 R^3 中，定义 $T(a,b,c)=(a,b,0)$ 为投影变换，

- (1) 求 f 在自然基 $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ 下的矩阵
- (2) 求 f 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0), \varepsilon_2=(-1,1,0), \varepsilon_3=(1,1,1)$ 下的矩阵

□ 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ，在 $R^{2 \times 2}$ 上定义线性变换 T 为
 $T(X) = AX, \forall X \in R^{2 \times 2}$ ，求 T 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵。

线性变换

□ 例 设单位向量 $u = (2/3, -2/3, -1/3)$, 给定 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $P(x) = x - (x, u)u$,

求 P 在自然基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的变换矩阵 A 。

线性变换

□ 不变子空间：W是T的不变子空间

□ $\forall \alpha \in W \Rightarrow T(\alpha) \in W。$

□ $T(W) \subseteq W$

□ 特别： $W = L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$

W是T的不变子空间 $\longleftrightarrow T(\alpha_j) \in W。$

线性变换

□ 不变子空间

- 线性空间的任何子空间对于数乘变换
- 整个线性空间
- 零子空间
- 值域、核空间、特征子空间

定理：线性变换 T 的不变子空间的交与和都是 T 的不变子空间。

线性变换

□例 $\mathbb{R}^3$ 上的正交投影 P : $P(x) = x - (x, u)u$, u 是单位向量。

证明 $L(u)$ 和 $u^\perp = \{x: (x, u) = 0\}$ 是 P 的不变子空间。

P 在 $L(u)$ 上是零变换, 在 $u^\perp$ 上是恒等变换!

线性变换

□ 空间分解与矩阵分解

➤ $V_n(F) = W \oplus U$, W, U 是 T 的不变子空间,

$$W = L\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}, U = \{\beta_{r+1}, \dots, \beta_n\}$$

则 $T \xrightarrow{\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n\}} \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$

➤ $V_n(F) = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$, U_i 是 T 的不变子空间

则 $T \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$

矩阵 A_i 的阶数 $= \dim U_i$

线性变换

□ 正交变换和酉变换

定义： 设 T 为内积空间上的线性变换，如果 T 不改变向量的内积，即存在 α, β 满足

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$$

则称 T 为内积空间上的正交变换。当空间为欧式空间时，称 T 为正交变换；为空间为酉空间时，称 T 为酉变换。

线性变换

□ 正交（酉）变换的充分必要条件

定理: T 是内积空间 $V(F)$ 上的线性变换，则下列命题等价：

- (1) T 是正交(酉)变换
- (2) T 保持向量的长度不变
- (3) T 把 $V(F)$ 的标准正交基变成标准正交基
- (4) T 在标准正交基下的矩阵是正交(酉)矩阵

线性变换

□ 正交（酉）变换的性质

定理：正交矩阵C和酉矩阵U具有如下性质：

- (1) 正交矩阵的行列式为1或-1；酉矩阵的行列式模长为1
- (2) $C^{-1} = C^T$; $U^{-1} = U^T$
- (3) 正交（酉）矩阵的逆矩阵、乘积仍然是正交（酉）矩阵
- (4) n阶正交（酉）矩阵的列和行向量组是欧式（酉）空间的标准正交基。

线性变换

□ 平面上的旋转

- 几何描述：绕坐标原点，逆时针旋转一个 θ 角。
- 变换矩阵：在自然基下，

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

□ 空间中的旋转

- ◆ 几何描述：绕空间中过原点的一条直线 L ，旋转一个 θ 角。

线性变换

一般地, n 维欧氏空间在平面 $L(i, j) = L(e_i, e_j)$

顺时针旋转角度为 θ 的变换 T 在自然基下的变化矩阵为

$$G(i, j) \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cos \theta & \sin \theta \\ & & & -\sin \theta & \cos \theta \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第 i 列 第 j 列

$R(i, j)$ 是正交矩阵, 通常称为 Givens 矩阵

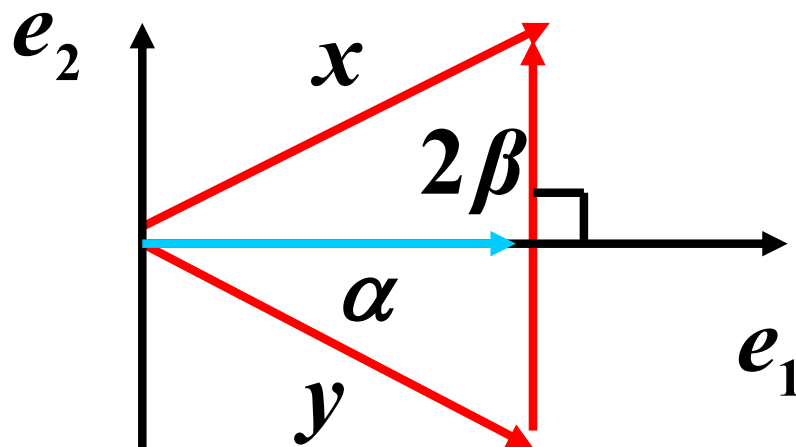
线性变换

□ 镜像变换 - Householder 变换

如图有正交分解

$$x = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2$$

$$\equiv \alpha + \beta, \quad \alpha \perp \beta$$



因此向量 x 关于 “与 e_2 轴正交的直线” 对称的镜像向量的表达式为

$$\begin{aligned} y &= x - 2\beta = x - 2(x, e_2)e_2 = x - 2e_2(x, e_2) \\ &= x - 2e_2e_2^T x = (I - 2e_2e_2^T)x \end{aligned}$$

线性变换

□ 线性空间 $V_n(F) \longrightarrow V_m(F)$ 的线性变换

定义1.16 设 $V_n(F)$ 和 $V_m(F)$ 是同一个数域 F 上的两个线性空间, 变换 $T: V_n(F) \rightarrow V_m(F)$, 即 $\forall \alpha \in V_n(F), T(\alpha) \in V_m(F)$. 如果变换 T 满足条件:

(i) $\forall \alpha \in V_n(F), \beta = T(\alpha) \in V_m(F)$

(ii) T 具有线性性:

$$T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2)$$

$$T(k\alpha) = kT(\alpha)$$

线性变换

□ 例

设 $A_{m \times n}$ 是空间 $F^{n \times n}$ 中任意一个给定的矩阵, 定义 $T_A: F^n \rightarrow F^m$ 如下:

$$\forall X \in F^n, \quad T_A(X) = AX,$$

则 T_A 是从 F^n 到 F^m 的一个线性变换.

□ 例

定义 $T: R^{n \times n} \rightarrow R$, 使 $\forall A \in R^{n \times n}, T(A) = \det(A)$ (A 的行列式), 证明 T 不

是一个线性变换.

线性变换

□ T 的变换矩阵:

➤ $T: V_n(F) \rightarrow V_m(F)$

➤ 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是空间 $V_n(F)$ 的基, $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 是空间 $V_m(F)$ 的基,

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)A$$

A 是变换矩阵 ($A \in F^{m \times n}$)。

线性变换

□ T在不同基下变换矩阵的关系

► 设在两个空间中分别取两组基:

$$V_n(F): \begin{cases} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \\ \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \end{cases}$$

$$V_m(F): \begin{cases} \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\} \\ \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\} \end{cases}$$

分析线性变换在两组基下变换矩阵的关系: 等价!

线性变换

□ 线性空间变换的维度:

➤ 定理:

设 T 是 n 维线性空间 $V_n(F)$ 到 m 维线性空间 $V_m(F)$ 的线性变换, 则

$$\dim R(T) + \dim N(T) = n.$$

证明 设 $\dim N(T) = t$.

线性变换

取 $N(T)$ 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\} \subseteq V_n(F)$, 将它们扩充为空间 $V_n(F)$ 的基: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_n\}$, 它们在变换 T 下的像集合为

$$\begin{aligned} & \{T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_t), T(\beta_{t+1}), \dots, T(\beta_n)\} \\ &= \{0, 0, \dots, T(\beta_{t+1}), T(\beta_{t+2}), \dots, T(\beta_n)\} \subseteq V_n(F). \end{aligned}$$

$\forall \eta \in R(T), \exists \alpha \in V_n(F), \eta = T(\alpha)$, 用基表示为

$$\alpha = \sum_{i=1}^t k_i \alpha_i + \sum_{j=t+1}^n k_j \beta_j,$$

从而 $\eta = T(\alpha) = \sum_{i=1}^t k_i T(\alpha_i) + \sum_{j=t+1}^n k_j T(\beta_j) = \sum_{j=t+1}^n k_j T(\beta_j),$

即 $R(T) = L\{T(\beta_{t+1}), T(\beta_{t+2}), \dots, T(\beta_n)\}.$

又任取数 l_j , 使

$$\sum_{j=t+1}^n l_j T(\beta_j) = 0.$$

由线性变换的定义, 上式即为 $T\left(\sum_{j=t+1}^n l_j \beta_j\right) = 0$. 又由线性变换的性质, 得

$$\sum_{j=t+1}^n l_j \beta_j = 0.$$

而 $\{\beta_j\}_{j=t+1}^n$ 线性无关. 从而 $l_j = 0, j = t+1, \dots, n$, 故 $\{T(\beta_{t+1}), \dots, T(\beta_n)\}$ 线性无关. 它们就是空间 $R(T)$ 的基. 因此, $\dim R(T) = n - t$,

即 $\dim R(T) + \dim N(T) = n.$

□



Thanks