



矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

内积空间

□ 内积空间

- 欧氏空间、酉空间
- 向量正交化

内积空间

□ 定义: 在实线性空间 V 中, 若任意两个向量 α, β 按某种法则有实数与之对应, 记作 (α, β) 并满足如下公理:

1. $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$
 $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
3. $(\alpha, \alpha) \geq 0$;
 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

则称实数 (α, β) 为向量 α, β 的内积, 定义了内积的实 (复) 线性空间叫做欧氏 (酉) 空间。

内积空间

□ 内积空间

例1 在向量空间 R^n ，设

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in R^n$$

$$\text{定义} \quad (\alpha, \beta) = \sum_i a_i b_i = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha$$

可以验证 (α, β) 满足内积定义，称之为 R^n 中的标准内积。

内积空间

□ 内积空间

例2 在向量空间 R^n , 设

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in R^n$$

定义 $(\alpha, \beta) = \sum_i i a_i b_i$

验证 (α, β) 也是 R^n 中的内积。

- (1) 同一线性空间可定义不同的内积 $\rightarrow$ 不同的欧氏空间;
- (2) 内积的定义不改变线性空间维数、不改变线性空间。

内积空间

□ 内积空间

例3 在实线性空间 $C[a,b]$ 中, 对于任意两个连续函数,

$f(x), g(x)$ 定义

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

验证 $(f(x), g(x))$ 是内积, $C[a,b]$ 是欧氏空间(维数无限)。

内积空间

□ 内积空间

例4 对于实线性空间中任意两个 n 阶矩阵 A 、 B ，定义

$$(A, B) = \text{tr}(AB^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

验证 (A, B) 是内积，向量空间 $R^{n \times n}$ 是欧氏空间。

内积空间

□ 内积空间

例5 在多项式空间中存在两个多项式 $f(x), g(x)$ ，定义

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

验证 $(f(x), g(x))$ 是内积。

内积空间

□ 内积空间

例6 对于实线性空间中任意两个向量 α 和 β ，以及一个 n 阶实矩阵空间的正定矩阵 A

$$(\alpha, \beta) = \beta^T A \alpha$$

验证 (A, B) 是内积，向量空间 $R^{n \times n}$ 是欧氏空间。

内积空间

□ 向量长度

➤ 定义：设 V 是酉（欧氏）空间，存在向量 $\forall \alpha \in V$ ，
向量长度（模）为 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 。

➤ 当 $\|\alpha\| = 1$ 时， α 称为单位向量。

$\forall \alpha \neq 0 \in V$ ，称 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 为 α 的规范化单位向量

定义 α, β 的距离为 $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$

内积空间

□ 向量长度的性质

➤ 基本性质

(1) $\|\alpha\| \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时等式成立;

(2) $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$;

➤ 更多性质

三角不等式、Cauchy 不等式

设 α, β 是内积空间的任意两个向量, 则

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

内积空间

□ 向量长度的性质

➤ 三角不等式

设 α, β 是内积空间的任意两个向量, 则

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

证明: 由内积的性质 (在欧氏空间中)

$$\begin{aligned}\|\alpha + \beta\|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\ &\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2\end{aligned}$$

两端开平方即得: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

内积空间

□ 向量长度的性质

➤ Cauchy 不等式

设 V 是欧氏空间, $\forall \alpha, \beta \in V$, 向量的长度满足

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

内积空间

□ 向量长度的性质

➤ Cauchy 不等式

设 V 是欧氏空间, $\forall \alpha, \beta \in V$, 向量的长度满足

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

证明: 由于对任意数 t , $(\alpha - t\beta, \alpha - t\beta) \geq 0$ 成立

$$\text{即 } (\beta, \beta)t^2 - 2(\alpha, \beta)t + (\alpha, \alpha) \geq 0$$

利用一元二次不等式的性质得

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$$

即 $(\alpha, \beta)^2 \leq \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$ 因此 Cauchy 不等式成立。

说明: 等号仅当 $\alpha - t\beta = 0$ 即两个向量线性相关时成立。

内积空间

□ 向量长度的性质

➤ Cauchy 不等式的推广

$$(1) \quad \forall x_i, y_i \in R$$

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2},$$

$$(2) \quad \forall f(x), g(x) \in C[a, b]$$

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx},$$

这就是著名的Schwarz不等式。

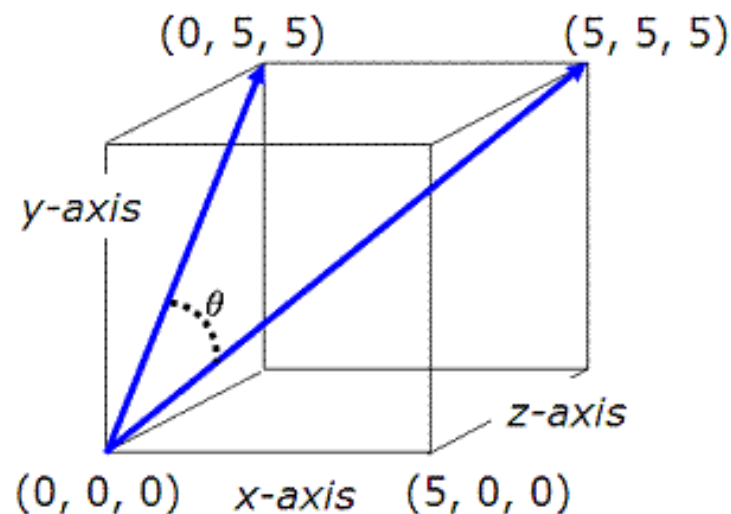
内积空间

□ 向量夹角

设 α, β 是欧氏空间的任意两个非0向量, 定义 α, β 的夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \quad 0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi$$

若 $(\alpha, \beta) = 0$ 则称向量 α, β 是正交向量。



内积空间

□ 向量夹角

设 α, β 是酉空间的任意两个非0向量, 定义 α, β 的夹角为

$$\cos^2 \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{(\alpha, \beta)(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} \quad 0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi$$

若 $(\alpha, \beta) = 0$ 则称向量 α, β 是正交向量。

内积空间

□ 向量的正交性

➤ 定理：如果非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的每一个都与向量 α 正交，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的任何线性组合也与向量 α 正交。

➤ 定理：两两正交的非零向量组线性无关。

内积空间

□ 向量的正交性

➤ 定理：如果非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的每一个都与向量 α 正交，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的任何线性组合也与向量 α 正交。

➤ 定理：两两正交的非零向量组线性无关。

内积空间

□ 向量的正交性

例 欧氏空间 $C[-\pi, \pi]$ 的三角函数组是正交的

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots\}$$

验证对于上述不同的三角函数 $f(x), g(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0 \text{ 成立}$$

内积空间

□ 向量的正交化

➤ 度量矩阵定义：设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的基，
令

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}$$

矩阵 A 被称为 **度量矩阵**（Gram 矩阵）

内积空间

□ 向量的正交化

➤ 定理：设 A 为 n 维欧氏空间 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵，则矩阵 A 为实对称正定矩阵。

内积空间

□ 向量的正交化

➤ 定理：设 A 为 n 维欧氏空间 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵，则矩阵 A 为实对称正定矩阵。

➤ 证明 设 V 是 n 维欧氏空间. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个基, A 是该基下的度量矩阵。 A 正定等价于 $x^T A x$ 正定。

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

为任一非 $\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n,$

则 α 是 V 中非零向量 $\exists (\alpha, \alpha) > 0$

为正定二次型, 从而知 A 为正定矩阵。

内积空间

□ 向量的正交化

➤ 定理：设 A 为 n 维欧氏空间 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵， $\forall \alpha, \beta \in V$ ， $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$
 $\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_n\alpha_n$ ，使得：

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\alpha_i, \alpha_j) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T A y$$

内积空间

□ 向量的正交化

➤ 定理：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的基，它们的度量矩阵为 A 和 B ， C 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵，则 $B = C^T A C$ 。

同一欧氏空间不同基的度量矩阵是相合矩阵。

内积空间

□ 向量的正交化

例8 设欧氏空间 $P[x]_3$ 中的内积为 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

(1) 求基 $1, x, x^2$ 的度量矩阵;

(2) 求 $f(x) = 1 - x + x^2$ 与 $g(x) = 1 - 4x - 5x^2$ 的内积。

内积空间

□ 向量的正交化

解：设基 $1, x, x^2$ 的度量矩阵为 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ，

$$a_{11} = (1, 1) = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx = 2, \quad a_{12} = a_{21} = (1, x) = \int_{-1}^1 1 \cdot x dx = 0,$$

$$a_{13} = a_{31} = (1, x^2) = \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad a_{22} = (x, x) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$a_{23} = a_{32} = (x, x^2) = \int_{-1}^1 x \cdot x^2 dx = 0, \quad a_{33} = (x^2, x^2) = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5},$$

则

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

内积空间

□ 向量的正交化

(2) 求 $f(x)=1-x+x^2$ 与 $g(x)=1-4x-5x^2$ 的内积。

方法一：利用定义，直接计算 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

方法二：利用基的度量矩阵及向量在基下的坐标可求两个向量的内积。

$f(x), g(x)$ 在基 $1, x, x^2$ 的坐标分别为 $\alpha = (1, -1, 1)^T$, $\beta = (1, -4, -5)^T$,

则

$$(f, g) = \alpha^T A \beta = (1, -1, 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

内积空间

□ 向量的正交化

例9 设 $\mathbb{R}^2$ 中的两个基为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

按某种规定定义了内积, 且 α_i, β_j 的内积为

$$(\alpha_1, \beta_1) = 2, (\alpha_1, \beta_2) = 3, (\alpha_2, \beta_1) = -4, (\alpha_2, \beta_2) = -7,$$

(1) 求基 α_1, α_2 的度量矩阵A;

(2) 求基 β_1, β_2 的度量矩阵B。

内积空间

解 (1) 由 β_1, β_2 是 $\mathbb{R}^2$ 中的基, 因此可设

$$\alpha_1 = k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2$$

即
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad \text{从而} \quad \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

因此 $\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_2$ 同理可求得 $\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$

于是 $(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_1, 2\beta_1 - \beta_2) = 2(\alpha_1, \beta_1) - (\alpha_1, \beta_2) = 1$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \beta_1 - \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1) - (\alpha_1, \beta_2) = -1$$

$$(\alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_2, 2\beta_1 - \beta_2) = 2(\alpha_2, \beta_1) - (\alpha_2, \beta_2) = -1$$

$$(\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_2, \beta_1 - \beta_2) = (\alpha_2, \beta_1) - (\alpha_2, \beta_2) = 3$$

基 α_1, α_2 的度量矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

内积空间

(2) 解法一：直接计算

可求得 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$ $\beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2$

分别计算内积 $(\beta_i, \beta_j), i, j = 1, 2$ 即可。

(2) 解法二：利用过渡矩阵

将 $\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_2$ $\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$ 写成矩阵形式为

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

即基 α_1, α_2 到 β_1, β_2 的过渡矩阵为 $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

而基 α_1, α_2 的度量矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

则基 β_1, β_2 的度量矩阵 $B = C^T A C = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 17 \end{bmatrix}$

内积空间

□ 标准正交基定义

在 n 维内积空间中，若基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 满足 $(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$
称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为标准正交基。

例 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

内积空间

□ 标准正交基特点

- 度量矩阵是单位矩阵，即 $A=I$
- $\alpha=(\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \cdots \ \varepsilon_n)X$, $\beta=(\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \cdots \ \varepsilon_n)Y$, $(\alpha, \beta) = Y^H X$
- $\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \cdots + x_n \varepsilon_n$, $x_i = (\alpha, \varepsilon_i)$
- α 和 β 正交 $\Leftrightarrow$ 其坐标 X 和 Y 正交
- 任何向量的内积将对应其坐标空间中的内积

内积空间

□ 施密特正交化

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是内积空间 V 中的一个线性无关向量组。令

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

.....

$$\beta_m = \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_m, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_m, \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1}, \beta_{m-1})} \beta_{m-1}$$

则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是正交向量组, 并且与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 等价。

内积空间

□ 施密特正交化

证明 容易直接验证 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是正交向量组;

仅证向量组的等价性。为表述方便起见, 把施密特正交化方法改写成如下形式

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - r_{12}\alpha_1 \\ \dots\dots\dots \\ \beta_m = \alpha_m - r_{1m}\alpha_1 - r_{2m}\alpha_2 - \dots - r_{m-1,m}\alpha_{m-1} \end{cases} \quad \text{令 } R = \begin{pmatrix} 1 & -r_{12} & \cdots & -r_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & -r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

内积空间

□ 施密特正交化

则R是上三角可逆矩阵, 并且 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)R$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)R^{-1} \quad \text{其中} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是等价的向量组。

内积空间

□ 施密特正交化

例 把 R^3 的基化成标准正交基

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad r_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Thanks