矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

线性空间

- 线性子空间
  - 子空间的基本性质
  - 子空间的交、和
  - 直和子空间

线性空间

子空间的定义、性质

定义：设集合$W \subseteq V_n(F)$，$W \neq \varnothing$，如果W中的元素关于$V_n(F)$中的线性运算也构成线性空间，则称W是$V_n(F)$的一个子空间。

- 线性子空间也是线性空间
- 平凡子空间：V_n和$\{0\}$
- 线性子空间的维数小于等于线性空间的维数

子空间的定义、性质

定理：设V为数域F上的线性空间，集合$\alpha \in W$，$\beta \in W$，数量$k \in F$，W是V的非空子集合，则W是V的一个子空间的充分必要条件是：

1. $\alpha + \beta \in W$
2. $k\alpha \in W$。

子空间定理证明

- 充分性：

  若满足加法封闭、数乘封闭 → 满足线性空间的八条性质

- 必要性

  若满足子空间定义 → 加法封闭、数乘封闭

子空间的定义、性质

推论： V为数域F上的线性空间, $W\subseteq V(W\neq\varnothing)$, 则W是V的子空间

$$\Leftrightarrow \forall\alpha,\beta\in W,\forall a,b\in P,a\alpha+b\beta\in W.$$

■充分性:设 $k=l=1$，$\forall x,y\in V_1\Rightarrow x+y\in V_1$

取$l=0$，$\forall x\in V_1,\forall k\in K\Rightarrow kx\in V_1$

■必要性: $\forall x\in V_1,\forall k\in K\Rightarrow kx\in V_1$（数乘封闭）

$\forall y\in V_1,\forall l\in K\Rightarrow ly\in V_1$（数乘封闭）

故 $kx+ly\in V_1$ （加法封闭）

线性空间

子空间实例

例：　$A \in F^{n\times n}$中集合

$$W_1 = \{ A \in F^{n\times n} \mid A^T = A \},$$

$$W_2 = \{ A \in F^{n\times n} \mid A^T = -A \},$$

$$W_3 = \{ A \in F^{n\times n} \mid |A| = 1 \}。$$

解　由于$\forall A_1, A_2 \in W_1$，有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2,$$

$$(kA_1)^T = kA_1^T = kA_1,$$

因此$A_1 + A_2, kA_1 \in W_1$，由定理1.5，W_1是$R^{n\times n}$的子空间.

线性空间

子空间的典型例子

✗ $W_1 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1+x_2=1 \}$,

✓ $W_2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 - x_2=0 \}$,

✓ $W_3 = \{ (x_1, 0) \mid x_1$ 任意 $\}$,

✓ $W_4 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1+2x_2+3x_3=0 \}$,

✓ $W_5 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1+x_2=0 \}$, ……

$W_2 \sim W_5$的维数?

线性空间

子空间示例

➢ n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的全部解向量所成集合W对于通常的向量加法和数量乘法构成的线性空间是 n 维向量空间 P^n 的一个子空间，称W为方程组的解空间.

注 ① (*)的解空间W的维数＝n－秩(A)，$A=(a_{ij})_{s\times n}$ ；

② (*)的一个基础解系就是解空间W的一组基.

线性空间

子空间示例

n元齐次线性方程组

判断P^{n}的下列子集合哪些是子空间，若为P^{n}的子空间，求出其维数与一组基.

$$W_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_i\in P\}$$

$$W_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n=1,x_i\in P\}$$

$$W_3=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)\,|\;x_i\in P,i=1,2,\cdots,n-1\}$$

线性空间

子空间示例

n元齐次线性方程组

解：W_1、W_3是P^n的子空间，W_2不是P^n的子空间.

事实上，W_1是n元齐次线性方程组

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \qquad ①$$

的解空间. 所以，维$W_1 = n-1$，①的一个基础解系

$$\eta_1 = (1,-1,0,\cdots,0), \quad \eta_2 = (1,0,-1,0,\cdots,0), \quad \cdots\cdots,$$

$$\eta_{n-1} = (1,0,\cdots,0,-1)$$ 就是W_1的一组基.

子空间示例

➢ n元齐次线性方程组

而在 W_2 中任取两个向量 α, β，设

$$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

则 $\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$

但是 $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n)$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = 1 + 1 = 2$$

$\therefore \quad \alpha + \beta \notin W_2$，故$W_2$不是$P^n$的子空间.

子空间示例

n元齐次线性方程组

下证W_3是P^n的子空间.

首先 $0=(0,0,\cdots,0)\in W_3$, $\therefore W_3\neq\varnothing$

其次,$\forall\,\alpha,\beta\in W_3,\forall k\in P,$

设 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)$, $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},0)$

则有 $\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_{n-1}+y_{n-1},0)\in W_3$

$k\alpha=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_{n-1},0)\in W_3$

故，W_3为V的一个子空间，且维$W_3=n-1$，

$\varepsilon_i=(0,\cdots,0,\underset{i}{1},0\cdots,0)$, $i=1,2,\cdots,n-1$

就是W_3的一组基.

子空间的定义、性质

生成子空间

定理：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是线性空间 V 中一组向量，这组向量所有可能的线性组合

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

所组成的集合是非空的，而且对两种运算封闭，因而是 V 的一个子空间，这个子空间叫做由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 生成的子空间，记为

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r).$$

子空间的定义、性质

- 生成子空间定理证明

利用子空间的充分必要条件

子空间的定义、性质

生成子空间定理证明

证明 $\forall \alpha, \beta \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，即

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m} (k_i + l_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{m} (kk_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

故 $L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 为 V 的子空间.

值得指出的是，任何一个线性空间 $V_n(F)$，若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是它的一组基，则 $V_n(F)$ 可表示为

$$V_n(F) = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}.$$

线性空间

子空间的定义、性质

生成子空间

扩基方法：设 W 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 W 的一组基,那么这组向量必定可扩充为整个空间的基. 也就是说在 V 中必定可以找到 **$n-m$** 个向量 $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$， 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基.

子空间的定义、性质

生成子空间

例： 求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 的维数与一组基，并把它扩充为F^4的一组基，其中

$$\alpha_1=(1,-1,2,4),$$
$$\alpha_2=(0,3,1,2),$$
$$\alpha_3=(3,0,7,14),$$
$$\alpha_4=(1,-1,2,0),$$
$$\alpha_5=(2,1,5,6)$$

子空间的定义、性质

生成子空间

解：对以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列向量的矩阵A作

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

由B知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组.

故，维 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 的一组基.

线性空间

子空间的定义、性质

矩阵$A\in F^{m\times n}$，两个子空间：

- A的零空间：$N(A)=\{X\in F^n:\ AX=0\}\subseteq F^n$,
- A的列空间(值空间)：

$$R(A)=\mathrm{L}\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}\subseteq F^m,$$

A_i为A的第i列。

$$R(A)=\{y:\ \exists\, x\in F^n,\ y=Ax\}$$

子空间的交与和

定理：如果V_1，V_2是线性空间V的两个子空间，那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是V的子空间，称之为交空间。

子空间的交与和

定理：如果V_1，V_2是线性空间V的两个子空间，那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是V的子空间，称之为交空间。

事实上，$\because 0 \in V_1, 0 \in V_2$，$\therefore 0 \in V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$

任取 $x, y \in V_1 \cap V_2$，即 $x, y \in V_1$,且$x, y \in V_2$,

则有 $x+y \in V_1, x+y \in V_2$，$\therefore$ $x+y \in V_1 \cap V_2$

同时有 $kx \in V_1, kx \in V_2$，$\therefore$ $kx \in V_1 \cap V_2$，$\forall k \in K$

故 $V_1 \cap V_2$为V的子空间.

子空间的交与和

定理： 如果V_1，V_2是线性空间V的两个子空间，那么它们的和 $V_1+V_2=\{\alpha=X_1+X_2 \mid X_1\in V_1, X_2\in V_2\}$，也是V的子空间，称之为**和空间**。

子空间的交与和

定理： 如果V_1，V_2是线性空间V的两个子空间，那么它们的和 $V_1+V_2=\{\alpha=X_1+X_2 \mid X_1\in V_1, X_2\in V_2\}$，也是V的子空间，称之为**和空间**。

事实上，$\because 0\in V_1, 0\in V_2$，$\therefore 0=0+0\in V_1+V_2\neq\varnothing$

任取 $x,y\in V_1+V_2$，设 $x=x_1+x_2, y=y_1+y_2$，

其中，$x_1,y_1\in V_1, x_2,y_2\in V_2$，则有

$$x+y=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\in V_1+V_2$$

$$kx=k(x_1+x_2)=kx_1+kx_2\in V_1+V_2,\ \forall k\in K$$

$V_1 \cup V_2$一般不是子空间，
$V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 + V_2$

子空间的交与和

问题：设$V_1 \subseteq V_n(F)$，$V_2 \subseteq V_n(F)$是子空间。既然$V_1 \cap V_2$和V_1+V_2都是子空间,那么$V_1 \cup V_2$呢?

例如：R^3 上的子空间

$$V_1 = \{(a,0,0) \mid a \in R\},\ V_2 = \{(0,b,0) \mid b \in R\}$$
$$V_1 \cup V_2 = \{(a,0,0),(0,b,0) \mid a,b \in R\}$$
$$= \{(a,b,0) \mid a,b \in R \text{且} a,b \text{中至少有一是} 0\}$$

不是R^3 上的子空间。

$$(1,0,0),\ (0,1,0) \in V_1 \cup V_2$$
$$(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0) \notin V_1 \cup V_2$$

子空间的交、和

几何意义：

$V_1=L\{e_1\}$，$V_2=L\{e_2\}$， V_1+V_2

$V_1=L\{e_1, e_2\}$，$V_2=L\{e_2\}$, $V_1\cap V_2$

几何意义：在三维几何空间中，两张通过原点的不同的平面之和是整个三维空间，而其维数之和却等于4。由此说明这两张平面的交是一维的直线。

线性空间

子空间的交、和

➢性质3：（合集子空间）

如果 $V_1 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$,

$V_2 = L\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$,

则 $V_1 + V_2 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$

➢性质4：

$$V_1 \cap V_2 \subseteq \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \subseteq V_1 + V_2 \subseteq V_n(F)$$

$$\dim W_1 \cap W_2 \leq \dim W_i \leq \dim W_1 + W_2 \leq \dim V_n(F)\text{。}$$

子空间的交、和

性质5：（维度关系）

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$$

证明思路：基扩充方法（从$W_1\cap W_2$的基出发）

证明 设$\dim(W_1\cap W_2)=r$，$\dim W_1=s_1$，$\dim W_2=s_2$，$W_1\cap W_2$基为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$，由(1.11)式，它们可分别扩充为：

$$W_1\text{ 的基}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1}\},$$

$$W_2\text{ 的基}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\},$$

则

$$W_1=L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1}\},$$

$$W_2=L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\},$$

$$W_1+W_2=L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1},\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\}.$$

下面证明$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1},\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\}$为线性无关组.

线性空间

子空间的交、和

性质5：（维度关系）

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

任取数k_i, q_i, p_i，使

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i = 0.$$

将上式改写为

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i,$$

等式左边是$W_1 \cap W_2$中的向量$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s_1}\}$的线性组合，所以有

$$\boxed{-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i \in W_1 \cap W_2.}$$

线性空间

子空间的交、和

性质5：（维度关系）

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

借助于$W_1 \cap W_2$的基，该向量可以表示为

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i,$$

将它写为线性组合

$$\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = 0.$$

由$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1}\}$线性无关，有$q_i=0, i=r+1,\cdots,s_1$. 代入(1.13)式后得

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i = 0,$$

注意其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}$为$W_2$的基，于是$k_i=0(i=1,2,\cdots,r)$，$p_i=0(i=r+1,\cdots,s_2)$，故$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1},\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\}$线性无关，$\dim(W_1+W_2)=r+(s_1-r)+(s_2-r)=s_1+s_2-r$，即(1.12)式得证. □

直和子空间

定义

设W_1和W_2是W的子空间，且满足$W = W_1 + W_2$，若$dim(W_1 \cap W_2) = 0$，则称此和为直和，称W为W_1和W_2的直和子空间，记为 $W = W_1 \oplus W_2$。

□直和子空间

定理：设$W=W_1+W_2$，则下列各条等价：

(1) $W=W_1\oplus W_2$

(2) $\forall X\in W$，$X=X_1+X_2$的表示是惟一的

(3) W中零向量的表示是惟一的

(4) $\dim W=\dim W_1+\dim W_2$

证明：循环证法 (1)→(2)→(3)→(4)→(1)

直和子空间

证明：循环证法 (1)→(2) →(3) →(4) →(1)

证明 证(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1)即可证明等价性.

(1)⇒(2) 设$W = W_1 \oplus W_2$,由直和的定义,$W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 如果$X \in W$,X有两种表示式,

$$X = X_1 + X_2,\quad x_i \in W_i,\quad i = 1,2,$$

$$X = Y_1 + Y_2,\quad y_i \in W_i,\quad i = 1,2,$$

则两式相减,有$0 = (X_1 - Y_1) + (X_2 - Y_2)$,即

$$X_1 - Y_1 = -(X_2 - Y_2).$$

又因为$(X_1 - Y_1) \in W_1$,$(X_2 - Y_2) \in W_2$,从而有

$$(X_1 - Y_1),(X_2 - Y_2) \in W_1 \cap W_2,$$

由已知$X_1 = Y_1$,$X_2 = Y_2$,即$\forall X \in W$,即形如$X = X_1 + X_2$的表示式惟一.

直和子空间

证明：循环证法 (1)→(2) →(3) →(4) →(1)

(2)⇒(3) 设 $\forall X \in W$，$X = X_1 + X_2$，$x_i \in W_i$，$i = 1,2$ 的表示式是惟一的.

又因为 $0 \in W$，且已知有 $0 = 0 + 0$，$0 \in W_i$，$i = 1,2$，故当 $0 = X_1 + X_2$ 时，由表示的惟一性，有

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0.$$

(3)⇒(4) 已知 W 中零向量有(3)中的表示惟一性.

任取 $X \in W_1 \cap W_2$，则 X 可表示为

$$X = X + 0, \quad X \in W_1, \quad 0 \in W_2,$$

$$X = 0 + X, \quad 0 \in W_1, \quad X \in W_2,$$

两式相减，即有 $0 = X - X$. 由 0 的惟一表示知 $x = 0$，即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 从而 $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. 由维数公式有，

$$\dim W = \dim W_1 + \dim W_2.$$

(4)⇒(1) 当 $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$ 时，由维数公式可推出

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W - (\dim W_1 + \dim W_2) = 0.$$

又注意到 $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ 当且仅当 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 故 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$，由定义：

$$W = W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2. \qquad \square$$

直和子空间

定义：子空间W的“直和补子空间”U:

$$V_n = W \oplus U$$

定义：设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 都是线性空间 V 的子空间，如果和 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \quad \alpha_i \in V_i (i = 1, 2, \cdots, s)$$

是唯一的，这个和就称为**直和**,记为

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

直和子空间

例　设在$R^{n\times n}$中，子空间

$$W_1=\{A \mid A^T=A\},\quad W_2=\{B \mid B^T=-B\},$$

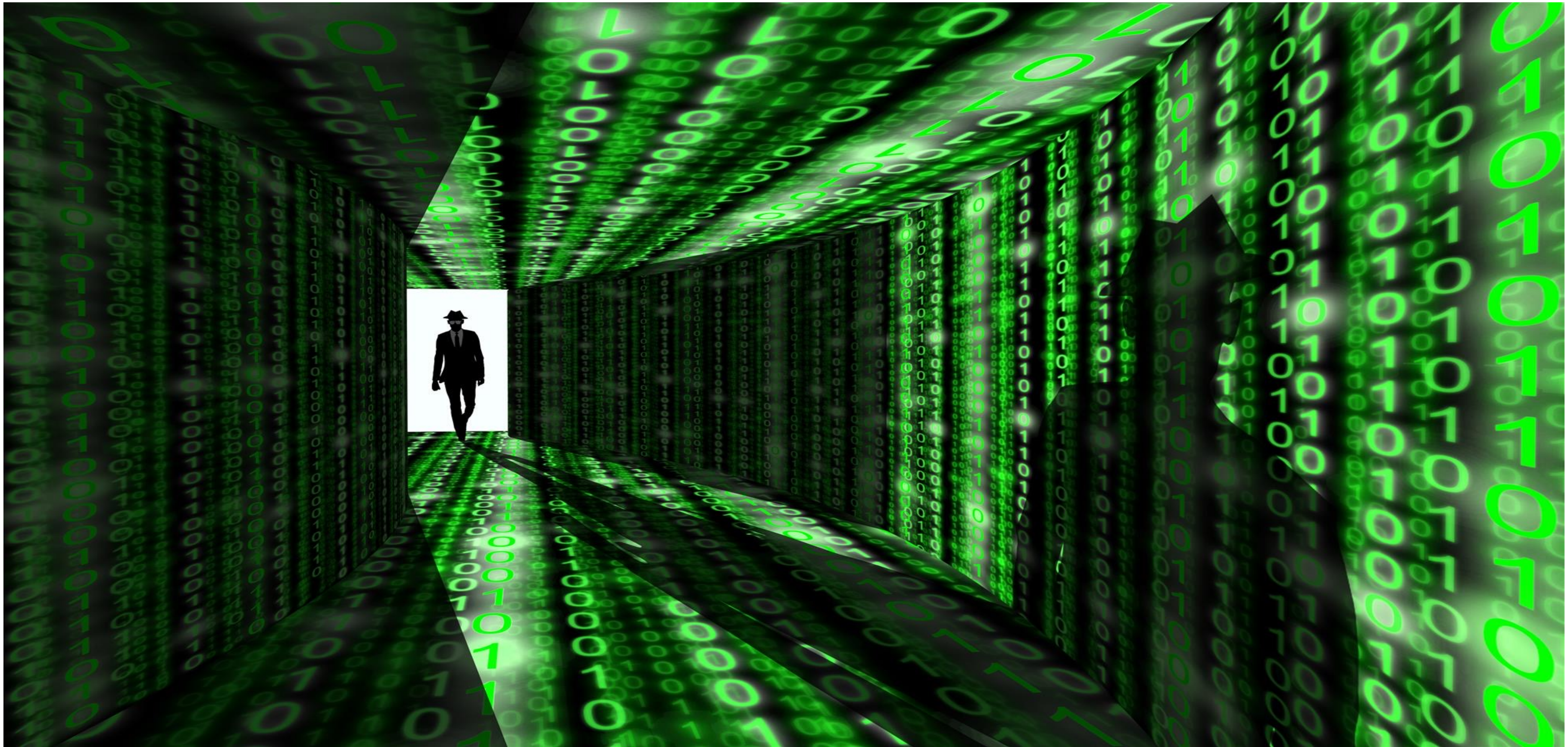
试证：$R^{n\times n}=W_1\oplus W_2$。

证明：(1) 证 $R^{n\times n}=W_1+W_2$

$$A=(A+A^T)/2+(A-A^T)/2$$

(2) 证 $W_1\cap W_2=\{0\}$

若 $A^T=A$, $A^T=-A$, 则 $A=0$



Thanks