矩阵论及其应用

主讲老师：徐跃东

2022-2023学年第二学期

课程概述

- 课程名称：　矩阵论
- 学分/学时：　2学分/32学时
- 授课对象：　电路、通信等专业硕士生、博士生
- 参考教材：
  - 《矩阵论》，杨明 著，华中科技大学出版社
  - 《矩阵论》，戴华著，科学出版社
  - 《矩阵分析与应用》，张贤达著，清华大学出版社
  - 《Matrix Analysis》，Roger A. Horn著，人民邮电出版社
- 声明：课件内容部分来自配套课件、网络素材，部分自制。

课程概述

- 授课教师：　徐跃东
  - 电邮：　ydxu@fudan.edu.cn
  - 办公室:　江湾校区交叉科学二号楼C5014室
  - Office hours：星期四下午 02:00~05:00
  - 助教：
- 课程微信群

教学安排

- 教学内容:

线性空间与线性变换	（6学时）
对角化及Jordan矩阵	（6学时）
矩阵分解	（6学时）
矩阵广义逆	（6学时）
矩阵范数与矩阵函数	（6学时）
学术报告	（2学时）

教学安排

- 成绩考核： 平时（40%） + 课程论文（60%）
  - 平时成绩包括出勤（10%）、课堂讨论（15%）、作业（15%）
  - 课程论文考核要点

与矩阵论及其应用契合程度	(10%)
课程论文内容的创新性	(10%)
课程论文的技术内容充实程度	(30%)
课程论文的表述清晰程度	(10%)

矩阵

- “程，课程也。群物总杂，各列有数。总言其实，令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之为方程”

——《九章算术》方程章

$$
\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
a_{n}^{1} & a_{2}^{1} & a_{1}^{1} \\
a_{n}^{2} & a_{2}^{2} & a_{1}^{2} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n}^{n} & & a_{1}^{n} \\
C_n & \cdots & C_1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\text{物}1 \\
\text{物}2 \\
\\
\text{物}n \\
\text{实}
\end{array}
\end{array}
$$

线性方程组的增广矩阵

线性空间与线性变换

- 线性空间与线性变换：
  - 线性空间
  - 内积空间
  - 线性变换

线性空间

线性空间的概念

➢ 设 V 是一个非空集合，其元素用 x, y, z 等表示；K是一个数域，其元素用 k, l, m 等表示。如果 V 满足：

(I)在 V 中定义一个“加法”运算，即当 x, y∈V 时，有唯一的和 x+y ∈V（封闭性），且加 法运算满足下列性质

（1）结合律

$$x+(y+z)=(x+y)+z\,;$$

（2）交换律

$$x+y=y+x\,;$$

（3）零元律

存在零元素0 使 x+ 0=x；

（4）负元律

对于任一元素 x∈V，存在一元素 y∈V，使 x+y=0，记为 y = -x;

线性空间

线性空间的概念

- 设 V 是一个非空集合，其元素用 x, y, z 等表示；K是一个数域，其元素用 k, l, m 等表示。如果 V 满足：

(II) 在 V 中定义一个“数乘”运算，即当 $x \in V, k \in K$时，有唯一的

$kx \in V$,（封闭性），且数乘运算满足下列性质：

分配律 $k(x+y)=kx+ky$；

分配律 $(k+l)x=kx+lx$ ；

结合律 $k(lx)=(kl)x$ ；

恒等律 $1x=x$;

则称 V为数域 K上的线性空间。

线性空间

线性空间的概念

- 定义的要点：

  集合V与数域F

  向量的加法和数乘向量运算

  运算性质的公理定义、特殊元素

- 数域F的定义：

  一个数的集合 称为是一个数域如果

  (1) 包含数 0 和 1;

  (2) 四则运算封闭 - 任意两个数的和,差,积,商（除数不为0）

  仍是F中的数.

  常见数域： 复数域C；实数域R；有理数域Q；

  自然数集N及整数集Z都不是数域

线性空间

常见的线性空间

- $F^n=\{X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T: x_i \in F\}$

  运算：向量加法和数乘向量

  R^n；C^n

- $V=F^{m\times n}=\{A=[a_{ij}]_{m\times n}: a_{ij}\in F\}$；

  运算：矩阵的加法和数乘矩阵

  $R^{m\times n}$；$C^{m\times n}$

- $P_n[x]=\{p(x)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i: a_i\in R\}$ （n-1阶多项式空间）

  运算：多项式的加法和数乘

- $C[a, b]=\{f(x): f(x)$ 为 $[a, b]$ 上连续(实)函数$\}$

  运算：函数的加法和数乘 （还有$C^1[a, b]$等）

线性空间

线性空间判别

- 集合 $V=\{x \mid x=[x_1,x_2,1]^T,\ x_1,x_2\in R\}$

  不是一个线性空间，因为加法不封闭。

- 线性非齐次方程组 $Ax=b$ 的解集

  $$V=\{\xi\in R^n \mid \xi=\eta+C_1\alpha_1+\cdots+C_{n-r}\alpha_{n-r}, A\in R^{m\times n}\}$$

  不构成线性空间，这里 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是对应齐次方程组的一个基础解系，η 为 $Ax=b$ 的一个特解。

线性空间

线性空间判别

- 次数为n-1的实多项式集合：　$\{p(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i x^i$ ： $a_i\in R$，且 a_{n-1} 不为零$\}$；

- 平面上不过原点的直线上的点的集合，如$V=\{(x_1, x_2)$： $x_1, x_2\in R$，且 $x_1+x_2=1\}$；

- 空间中不过原点的直线或平面上的点的集合。

线性空间

线性空间证明

- 设 R^+ ={全体正实数}，其“加法”及“数乘”运算定义为: $x \oplus y=xy$, $kx=x^k$。 证明： R^+是实数域R上的线性空间。
- [证明] 首先需要证明两种运算的唯一性和封闭性

①唯一性和封闭性

若$x>0, y>0, k\in R$，则有 $x \oplus y=xy\in R^+$， $k\circ x=x^k \in R^+$ ，封闭性得证。

②八条性质

（1） $x \oplus (y\ z) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y)\ z$

（2） $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$

（3）1是零元素； $x \oplus 1 = x1 = x$

（4）$1/x$是x的负元素； $x \oplus 1/x = x(1/x)=1$ (零元素)

线性空间

- 设 R^+＝{全体正实数}，其“加法”及“数乘”运算定义为：$x \oplus y = xy$, $k \circ x = x^k$。证明：R^+是实数域R上的线性空间。

  - （5） $k \circ (x \oplus y) = (xy)^k = (x)^k (y)^k = (k \circ x) \oplus (k \circ y)$ [数因子分配律]
  - (6) $(k \oplus l) \circ x = (x)^{kl} = (x)^k (x)^l = k \circ x \oplus l \circ x$; [分配律]
  - (7) $k \circ (l \circ x) = (x)^{lk} = (x)^{kl} = (k \circ l) \circ x$; [结合律]
  - (8) $1 \circ x = (x)^1 = x$; [恒等律]

由此可证，R^+是实数域R上的线性空间。

线性空间简单性质

□线性空间的一般形式：

- V (F)， V中元素被统称为向量：α，β，γ，…

□线性空间的简单性质（共性）：

定理1.1 V (F) 具有性质：

（1） V (F)中的零元素是惟一的。

（2） V (F) 中任何元素的负元素是惟一的。

（3） 数零和零元素的性质：

$0\alpha = 0$，$k0 = 0$，$k\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ 或 $k = 0$

数0

向量0

（4） $-\alpha =$ （-1） α

线性相关

线性代数中向量组线性相关性概念

定义：设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$，$\alpha_r$ $(r \geq 1)$ 是线性空间V的一组向量，如果存在不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$，$\alpha_r$ $\in F$ ，满足

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_r \alpha_r = 0,$$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$，$\alpha_r$ **线性相关**，否则就称其**线性无关**。

线性空间的相关性定义

- 与线性代数中的定义相同
- 向量的定义更具有一般性

线性相关

- 例：证明$R^{2\times 2}$中的一组向量线性相关

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

证明：取k_1，k_2，$k_3\in F$,

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

$$=k_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

则有k_1-k_2=0, k_2+k_3=0

该方程组有非零解，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关.

基和维数

基和维数定义

定义 设V(F)为线性空间，若存在一组线性无关的向量α_1，α_2，…，α_n，使得V中任一向量均可由其线性表示，即任给β，存在F中数组{ x_1，x_2，…，x_n}，使得 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + \cdots + x_n\alpha_n$，则称向量组{ α_1，α_2，…，α_n}为V的一组基，基中所含向量的个数称为V的维数，

记为 $dim\, V = n, n < +\infty$，或 $n = +\infty$.

基和维数

- **自然基**：$F^n=\{X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T: x_i \in F\}$，$dim\ F^n=n$，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$，$e_i=(0, 0, \ldots, i, 0, \ldots, 0)^T$，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$线性无关，构成一组基，称为自然基。

- 其他示例：

  $R^{m\times n}$，自然基$\{E_{ij}\}$，$dim\ R^{m\times n}=m\times n$。

  $P_n[x]$，自然基$\{1, x, x^2, x^3\cdots, x^{n-1}\}$，$dim P_n[x]=n$

  $C[a, b]$，$\{1, x, x^2, x^3\cdots x^{n-1}\cdots\}\subseteq C[a,b]$，

  $dim\ C[a, b]=\infty$

基和维数

- 定理 $V_n(F)$中任n个线性无关的向量均构成它的基。

坐标

定义 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ 是线性空间 $V_n(F)$ 的一组基，$\forall \beta \in V_n(F)$，有 $\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$，则称 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 β 在基 $\{\alpha_i\}$ 下的坐标，称 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 为 β 在基 $\{\alpha_i\}$ 下的坐标向量，简称坐标。

坐标依赖于基，向量在给定基下的坐标惟一；

坐标的表达形式：F^n 中向量

例 求 $R^{2\times2}$ 中向量 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 在基 $\{E_{ij}\}$ 下的坐标。

坐标

- 例 设空间$P_4[x]$的两组基为：

  $\{1, x, x^2, x^3\}$ 和

  $\{1, (x-1)^1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$

  （推广（$(x-1)$变$(x-x_0)$）？）

  求 $f(x)=2+3x+4x^2+x^3$ 在这两组基下的坐标。

坐标

解法：泰勒展开法

又由 Taylor 公式

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$=\begin{pmatrix}1 & (x-1) & (x-1)^2 & (x-1)^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(1)\\ f'(1)\\ \frac{1}{2}f''(1)\\ \frac{1}{3!}f'''(1)\end{pmatrix},$$

故 $f(x)$在基$\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\}$下的坐标为$\left(f(1)\quad f'(1)\quad \frac{f''(1)}{2!}\quad \frac{f'''(1)}{3!}\right)^{\mathrm{T}}$.

线性变换

- 目的：“透过现象看本质”
- 方法：“化归”思想，由难化易，由繁化简
- 结果：“形变质不变”

基变换

基变换：

- 线性空间的基无穷多个，基与基之间如何转换?

基变换公式：

设空间中有两组基：$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$，$\{\beta_1, \beta_2, \ldots\beta_n\}$

则：$(\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n)=(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n)C_{n\times n}$

过渡矩阵C的性质：

- C的第i列是β_i在基$\{\alpha_k\}$下的坐标
- C为非奇异矩阵

坐标变换

坐标变换公式:

- 已知空间中两组基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$

满足:

$$(\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_n)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)C_{n\times n}$$

若存在

$$\alpha=(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\alpha_n)X \qquad \beta=(\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_n)Y$$

X与Y的关系是什么?

推论	X=CY 或 Y=C^{-1}X

坐标变换

- 例：已知空间R中两组基（I）$\{E_{ij}\}$

（II）$\left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\}$

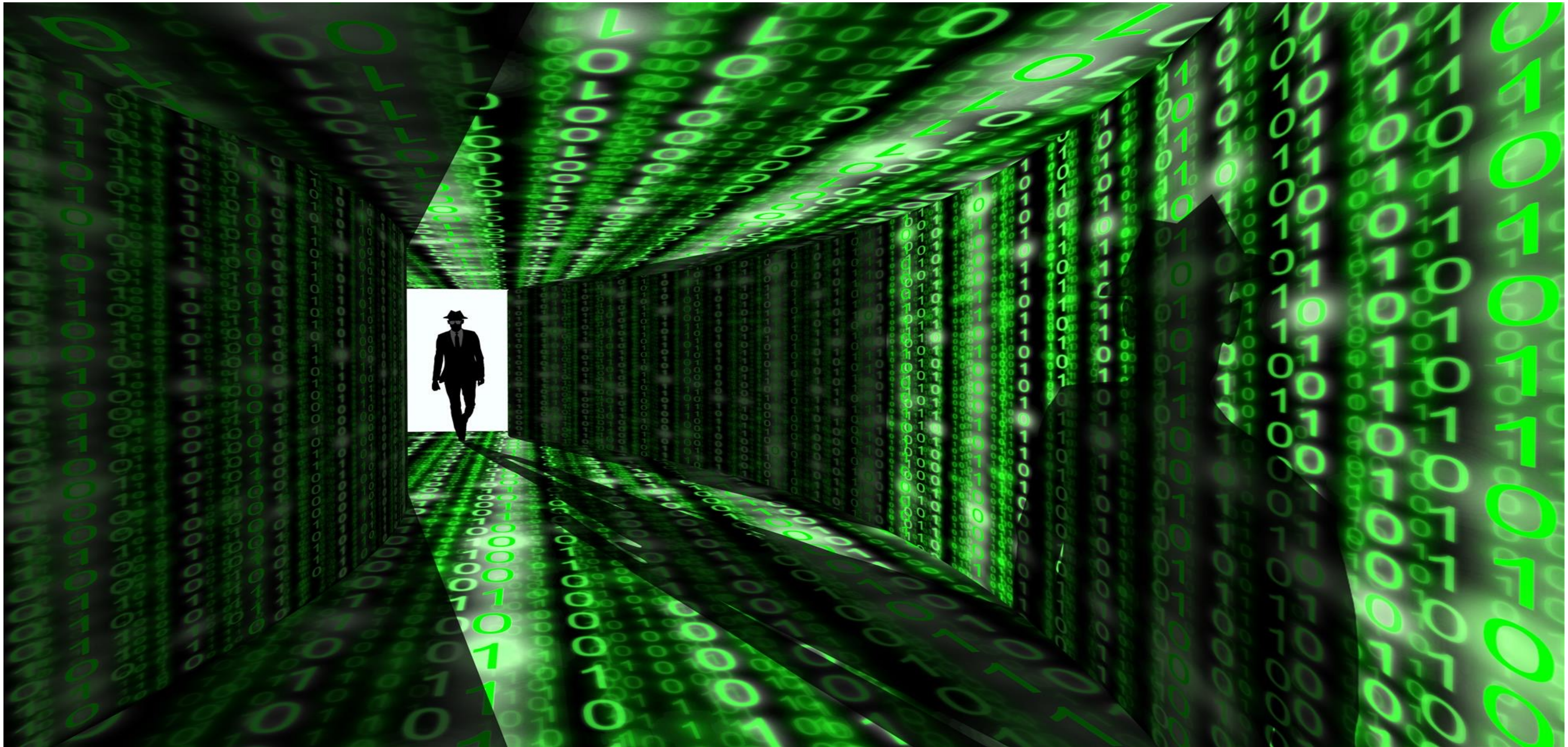
1). 求从基（I）到基（II）的过渡矩阵C。

2). 求矩阵 $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 在基（II）的坐标Y。

坐标变换

例12 从例10可知$f_1=1+2x+4x^3$,$f_2=x+x^2+4x^3$,$f_3=1+x-3x^2$,$f_4=-2x^2+x^3$ 也是线性空间$P_4[x]$的一组基,求空间的基$\{1,x,x^2,x^3\}$到基$\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$的过渡矩阵C,并求向量$f=1+x+x^2+x^3$在基$\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$下的坐标Y.

- 第一步：计算自然基到$\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$的过渡矩阵
- 第二步：根据过渡矩阵和自然基下向量坐标计算新坐标Y



Thanks